Trägheitsmoment (TRÄ)

Manuel Staebel – 2236632 / Michael Wack 2234088

1 Versuchsbeschreibung

Auf Drehtellern, die mit Drillfedern ausgestattet sind, werden die zu messenden Gegenstände befestigt, und die Schwingungsdauer wird mit Hilfe einer Lichtschranke gemessen. Die Schwingungsdauer hängt vom Trägheitsmoment ab, genauso wie bei linearen Schwingungen die Schwingungsdauer von der Masse abhängt.

2 Versuchsdurchführung

2.1 Bestimmung des Trägheitsmomentes einer Puppe

2.1.1 Bestimmung des Trägheitsmomentes auf der Drillachse

2.1.1.1 Erste Bestimmung von D*

Der Abstand zwischen der Öse, an dem wir die Federwaage einhängten, betrug

r = (01850 ± 0,0005) m

Formeln: M = r · F; D* = $-\frac{M}{\varphi}$

Mit den gemessenen Tangentialkräften F ergibt sich die folgende Tabelle (Werte für M und D* sind Taschenrechnerwerte und noch nicht auf die korrekten Stellen gerundet):

$\varphi[°]$	F [N]	M [Nm]	D* [kgm^{2}s^{-1}]
90° (iU)	0,19	0,03515	−0,02238
180° (iU)	0,40	0,07400	−0,02355
90° (gU)	0,19	0,03515	−0,02238
180° (gU)	0,39	0,07215	−0,02297

iU = im Uhrzeigersinn; gU = gegen den Uhrzeigersinn

$$\overline{D*}' = -0{,}02\, kgm^2 s^{-1}$$
$$s_{\overline{D*}} = 0{,}00$$
$$u_{\overline{D*}} = 0{,}00$$
$$\overline{D*} = (-0{,}02 \pm 0{,}00)\, kg\, m^2 s^{-1}$$

2.1.1.2 Zweite Bestimmung von D*

Stange	Länge	(0,420 ± 0,005) m
	Durchmesser	(3,00 ± 0,05) mm
	Masse	(23 ± 1) g
Zylinder	Höhe	(9,55 ± 0,05) mm
	Durchmesser	(30,00 ± 0,05) mm
	Masse	(58 ± 1) g

Schwingungdauer T_u der Stange ohne Gewichte:

Auslenkung 90° (3 Messungen)		(0,78 ± 0,01) s
		(0,78 ± 0,01) s
		(0,78 ± 0,01) s

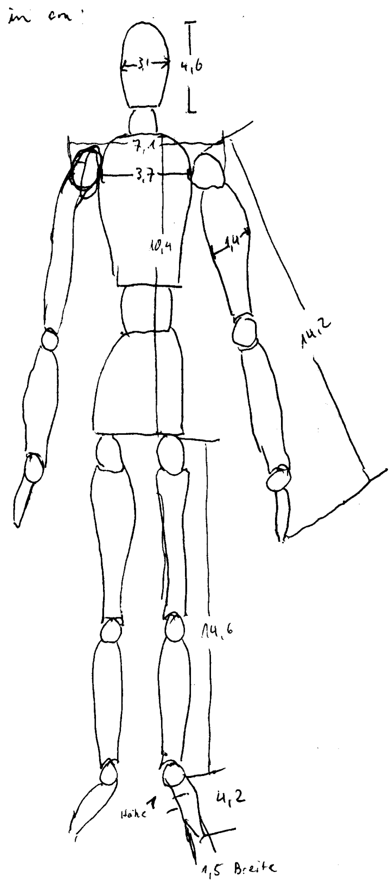
Schwingungsdauer der Stange mit Gewichten:

Gewichte bei r = 10cm	Auslenkung 90°	(1,61 ± 0,01) s
(3 Messungen)		(1,61 ± 0,01) s
		(1,61 ± 0,01) s
	Auslenkung 180°	(1,62 ± 0,01) s
(3 Messungen)		(1,62 ± 0,01) s
		(1,62 ± 0,01) s
Gewichte bei r = 15cm	Auslenkung 90° **	(2,25 ± 0,01) s
		(2,25 ± 0,01) s
		(2,25 ± 0,01) s
	Auslenkung 180°	(2,27 ± 0,01) s
		(2,27 ± 0,01) s
		(2,27 ± 0,01) s
Gewichte bei r = 20cm	Auslenkung 90°	(2,92 ± 0,01) s
		(2,92 ± 0,01) s
		(2,92 ± 0,01) s

**) Werte im Rahmen des Fehlers bis ca. 9 Schwingungen (dabei wird die Amplitude auf ca. 45° Auslenkung gedämpft) konstant.

Formeln: $D*=4\pi^2 \frac{J_1}{T_1^2-T_u^2}$; $J_1=2mr^2$

r [m]	T_1 [s]	D* [kgm^2s^{-1}]
0,10	1,61	−0,02
0,15	2,25	−0,02
0,20	2,92	−0,02



2.1.1.3 Trägheitsmoment der Puppe

Wer verwendeten die mit **Nummer 5** gekennzeichnete Puppe.

Stellung 1 (Arme an den Körper gelegt):

Auslenkung 90° (0,85 ± 0,01) s
(0,85 ± 0,01) s
(0,85 ± 0,01) s

Stellung 2 (Arme vom Körper gestreckt):

Auslenkung 90° (1,04 ± 0,01) s
(1,04 ± 0,01) s
(1,04 ± 0,01) s

Die Schwingungsdauer der Anordnung mit Drillachse (ohne Puppe) lieferte im Rahmen des Fehlers die gleichen Werte wie ohne Drillachse.

Höhe der Puppe: (0,316 ± 0,001) m
Masse der Puppe: (181 ± 1) g

2.1.1.4 Abmessungen der Puppe

Siehe nebenstehende Skizze!

2.2 Bestimmung des Trägheitsmoments des menschlichen Körpers

2.2.1 Bestimmung der Winkelrichtgröße des Drehtellers

Wir verwendeten den mit **Nummer 1** gekennzeichneten Drehteller.

Gemessen wurden die Tangentialkräfte an den seitlichen Bohrungen des Drehtellers, welche sich in einem Abstand von r = (29,2 ± 0,1) cm befanden.

Auslenkung (im Uhrzeigersinn)	F [N]	Auslenkung (gegen Uhrzeigersinn)	F [N]
0°	0	0°	0
10°	1,2 ± 0,1	10°	1,0 ± 0,1
20°	2,4 ± 0,1	20°	2,0 ± 0,1
30°	3,0 ± 0,1	30°	3,2 ± 0,1
40°	3,6 ± 0,1	40°	4,2 ± 0,1
50°	4,2 ± 0,1	50°	5,4 ± 0,1
60°	5,4 ± 0,1	60°	6,4 ± 0,1
70°	6,8 ± 0,1	70°	7,6 ± 0,1
80°	8,0 ± 0,1	80°	8,2 ± 0,1
90°	9,6 ± 0,1	90°	9,6 ± 0,1

Formeln: $M = r \cdot F$; $D^* = -\frac{M}{\varphi}$

$D^*(90°) = 1{,}78\ kgm^2s^{-1}$

2.2.2 Bestimmung des Trägheitsmoments des Drehtellers

Auslenkung ca. 90°	Lichtschankenmessung	(4,1 ± 0,1) s
		(4,1 ± 0,1) s
		(4,1 ± 0,1) s
	Digital−Stoppuhr	(4,2 ± 0,1) s
		(4,1 ± 0,1) s

(4,1 ± 0,1) s

Formeln: $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}} \quad \Rightarrow J = \frac{T^2}{4\pi^2} \cdot D$

mit D(90°) = 1,78 kgm^2s^{-1} ; T = 4,1s ergibt sich:
J_1 = 0,760 kgm^2

Drehteller:

Dicke h = (2,0 ± 0,1) cm
Radius r = (30,0 ± 0,1) cm
$\Rightarrow$ Volumen V = π r^2 h = 5,65 · 10^{-3} m^3

Masse m = ρ ·V = 2,7 g/cm^3 · 565 · 10 cm^3 = 15,27 kg

$$J_2 = \frac{m \cdot R^2}{2} = 0{,}687\,kgm^2$$

2.2.3 Trägheitsmoment des eigenen Körpers

Versuchssubjekt: Manuel

Größe	(184 ± 1) cm
Masse	(76,6 ± 0,1) kg
Schulterbreite	(52 ± 1) cm
Brustumfang	(101 ± 1) cm
Hüft−Hals−Länge	(66 ± 1) cm
Beinlänge	(83 ± 1) cm
Armlänge	(75 ± 1) cm
Armumfang	(32 ± 1) cm
Beinumfang	(52 ± 1) cm
Fuß: Breite	(10 ± 1) cm
Höhe	(9 ± 1) cm
Länge	(29 ± 1) cm

Auslenkung ca. 90° Stellung 1 
(6,6 ± 0,1) s
(6,6 ± 0,1) s
(6,6 ± 0,1) s

Stellung 2 
(9,0 ± 0,1) s
(8,9 ± 0,1) s
(9,0 ± 0,1) s

3 Versuchsauswertung

3.1 Trägheitsmoment der Puppe

$$J = \frac{D * (T^2 - T_u^2)}{4\pi^2}$$

J_{an} = (5,78 · 10^{-5} ± 1,17 · 10^{-5}) kg m² (angelegte Arme)
J_{ge} = (2,40 · 10^{-4} ± 0,13 · 10^{-4}) kg m² (seitlich ausgestreckte Arme)
Damit ergibt sich ein Verhältnis der Trägheitsmomente bei ausgestreckten Armen zu angelegten Armen von

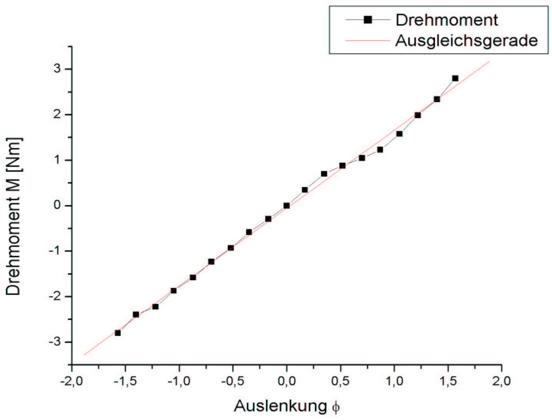
$$\frac{J_{¿}}{J_{an}} = 4{,}15\ .$$

3.2 Drehmoment Diagramm des Drehtellers

Die ermittelte Gleichung für die Ausgleichsgerade ist

M = −0,05 Nm + 1,71 m · F

mit einem Fehler von 0,02 für die Steigung $\Rightarrow$ D = (1,71 ± 0,02)



3.3 Trägheitsmomente Drehteller / Körper

$$J = \frac{T^2}{4\,\pi^2} \cdot D$$

$$J_{Drehteller} = \frac{(4{,}1)^2}{4\,\pi^2} \cdot 1{,}71 = 0{,}73\ kgm^2$$

$$J_{angelegt} = \frac{(6{,}6)^2}{4\,\pi^2} \cdot 1{,}71 = 1{,}89\ kgm^2$$

$$J_{gestreckt} = \frac{(9{,}0)^2}{4\,\pi^2} \cdot 1{,}71 = 3{,}51 kgm^2$$

Daraus ergibt sich ein Verhältnis der Trägheitsmomente bei ausgestreckten Armen zu angelegten Armen von

$$\frac{J_{ausgestreckt}}{J_{angelegt}} = 1{,}86$$

3.4 Puppe / Körper

3.4.1 Extrapolation von Puppe auf Körper

$$J_{Mensch,\ angelegt} = \frac{M}{m} \cdot \left(\frac{L}{l}\right)^2 \cdot J_{Puppe} = \left(\frac{76{,}6}{0{,}181}\right) \cdot \left(\frac{184}{31{,}6}\right) \cdot J_{an} = 0{,}14\ kgm^2$$

$$J_{Mensch,\ gestreckt} = \frac{M}{m} \cdot \left(\frac{L}{l}\right)^2 \cdot J_{Puppe} = \left(\frac{76{,}6}{0{,}181}\right) \cdot \left(\frac{184}{31{,}6}\right) \cdot J_{\mathrm{ge}} = 0{,}59\ kgm^2$$

3.4.2 Körper als Zylinder

$$J_{Zylinderkörper} = \frac{M\ R^2}{2} = \frac{(76{,}6\ kg \cdot (0{,}26m)^2)}{2} = 2{,}59\ kg\ m^2$$

Der Vergleich mit dem gemessenen Trägheitsmoment J_{an} = 1,89 kgm^2 ergibt eine sehr gute Übereinstimmung in Anbetracht der sehr groben Näherung des menschlichen Körpers als Zylinder. Die Extrapolationsrechnung von der Puppe auf den Körper liefert ebenfalls Werte in der richtigen Größenordnung.

3.4.3 Verfeinertes Modell des Körpers aus geometrischen Elementen mit bekanntem Trägheitsmoment

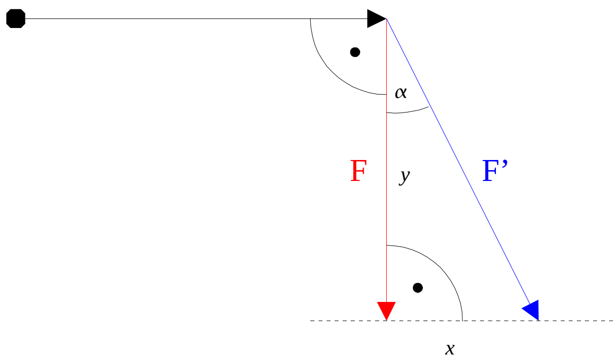
	Höhe	Radius	Volumen	Masse	Abstand Drehachse	Trägheitsmoment
Kopf (Kugel)		0,088	0,003	2,855	0,000	0,009
Rumpf (Zylinder)	0,660	0,160	0,053	53,080	0,000	0,679
Arme (Zylinder)	0,750	0,050	0,006	5,890	0,260	0,406
Beine (Zylinder)	0,830	0,083	0,018	17,963	0,202	0,795
		Summe d. Massen:		79,789	**Summe:**	1,889

Alle in der Tabelle angegebenen Einheiten sind SI−Einheiten. Ein Modell mit Trägheitsmoment 1,89 kgm^2 ergibt sich aus den geometrischen Figuren, deren Trägheitsmomente bekannt sind. Wie man erkennen kann, stimmen auch die Masse des Modells in etwas mit der Masse des tatsächlichen Körpers, auf den sich das Modell bezieht, überein.

4 Fragen

4.1 Welchen Fehler (in %) begehen Sie, wenn Sie bei der Messung der Tangentialkräfte (Abb. 5) nicht exakt tangential ziehen, sondern um 5° bzw. 10° vom rechten Winkel abweichen?

Zieht man nicht exakt tangential sondern um den Winkel α abweichend vom rechten Winkel, so muss man eine größere Kraft F’ aufbringen um die zusätzliche Kraftkomponente in x−Richtung zu kompensieren.



Der Fehler der daraus entsteht berechnet sich wie folgt:

$$F = y;\quad F' = \sqrt{y^2 + x^2} = \sqrt{y^2 + \tan^2\alpha\, y^2} = y\sqrt{1 + \tan^2\alpha}$$

$$\Rightarrow (F' - F)/F = \sqrt{1 + \tan^2\alpha} - 1$$

Für $\alpha = 5°$ ergibt sich ein Fehler von 0,38%.

Für $\alpha = 10°$ ergibt sich ein Fehler von 1,54%.

Bei kleinen Winkeln kann man den Fehler vernachlässigen.

4.2 Das Trägheitsmoment einer Modellpuppe (mit angelegten Armen und Beinen) bezüglich einer Achse durch die Längsachse der Puppe und durch den Schwerpunkt betrage J_S=0,60 kg cm^2. Wie groß ist es bezüglich einer um 1 cm parallel versetzten Drehachse? Die Masse der Puppe betrage 180 g.

Nach dem Satz von Steiner gilt: $J = J_S + m\,a^2$

Eingesetzt erhält man: $J = 0{,}60\,\mathrm{kg\,cm^2} + 0{,}180\,\mathrm{kg} * 1\,\mathrm{cm^2} = 0{,}78\,\mathrm{kg\,cm^2}$

4.3 Im Versuch wird das Trägheitsmoment der Trägheitsstange mit den kleinen Messingzylindern berechnet. Welchen Unterschied (Angabe in Prozent) macht es, ob das Trägheitsmoment des Zylinders gemäß der Formel (3.4) bezüglich der Drehachse der Drillfeder exakt berechnet wird oder der Zylinder als punktförmig angenommen wird? Abstand Drehachse − Zylindermitte r = 10 cm; Höhe des Zylinders h = 8,5 mm; Durchmesser des Zylinders d = 3 cm. Dichte von Messing = 8,33 g/cm³.

Die Masse eines Zylinders beträgt:

$$m=\rho\cdot V=\frac{1}{4}\rho\pi d^2 h=\frac{1}{4}\cdot 8{,}33\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}\cdot\pi\cdot 3^2\,\mathrm{cm}^2\cdot 0{,}85\,\mathrm{cm}=50{,}05\,\mathrm{g}$$

Berechnet man das Trägheitsmoment des Zylinders als Punktmasse, so ergibt sich:

$$J_p=m\cdot r^2$$

Mit dem Satz von Steiner erhält man:

$$J=J_S+m\cdot r^2$$

Dies bedeutet, dass der Unterschied der beiden Berechnungsmethoden genau J_S, also das Trägheitsmoment des Zylinders, wenn er genau auf der Drehachse sitzen würde, ist.

$$J_S=m\cdot\left(\frac{d^2}{16}+\frac{h^2}{12}\right)$$

Der Fehler beträgt also $\frac{J_S}{J_P}=\frac{\left(\frac{d^2}{16}+\frac{h^2}{12}\right)}{r^2}=0{,}62\,\%$.

Man kann in diesem Fall also guten Gewissens mit Punktmassen rechnen.

4.4 Mit einem T−Y−Schreiber kann die Amplitude der Schwingung des unbelasteten Drehtellers über längere Zeit aufgezeichnet werden.
a) Wie kann daraus die Dämpfung gewonnen werden.

Die Einhüllende der Messkurve lässt sich als e−Funktion der Form $e^{-\lambda t}$ ausdrücken. λ ist die Dämpfungskonstante. Trägt man die Maximalwerte der Kurve auf halblogarithmischen Papier an, so ergibt sich eine Gerade. Die Steigung dieser Geraden entspricht der Dämpfungskonstante λ .

b) Diskutieren Sie den Unterschied der Schwingungsdauer mit bzw. ohne Dämpfung (größer oder kleiner; Formel)?

Für eine gedämpfte Torsionsschwingung gilt: $T=2\pi\sqrt{\frac{J-\lambda^2}{D^*}}$.

Die Schwingungsdauer verringert sich demnach, wenn die Dämpfungskonstante erhöht wird.

4.5 Berechnen Sie das Trägheitsmoment des Menschen als Zylinder (Formel (11)) und als elliptischer Zylinder. Nehmen Sie an, dass beim elliptischen Zylinder die große Halbachse doppelt so groß wie die kleine Halbachse sein soll. Beachten Sie, dass die Gesamtmasse der Person dabei konstant bleibt. Um wieviel Prozent ist das elliptische Trägheitsmoment größer als das zylindrische Trägheitsmoment? Diese Aufgabe gibt einen ersten Hinweis auf die Größenordnung der Unterschiede zwischen verschiedenen Modellen.

Da die sich die Dichte nicht verändert und die Gesamtmasse beider Modelle übereinstimmen soll, muss auch ihr Volumen identisch sein. Die Größe der Person soll natürlich auch konstant bleiben.

$V_Z=V_E\Rightarrow\pi R^2 h=\pi a\, b\, h\Rightarrow a\cdot b=R^2$ mit a = 2b ergibt sich $b=R/\sqrt{2};\, a=\sqrt{2}\cdot R$

Das Trägheitsmoment des Zylinders beträgt: $J_Z=\frac{1}{2}\, m\cdot R^2$

Das Trägheitsmoment des elliptischen Zylinders beträgt: $J_E = \frac{m}{4} \; a^2 + b^2 = \frac{m}{4} \; 2\,R^2 + \frac{1}{2} R^2 = \frac{5}{8} m\, R^2$

Der prozentuale Unterschied beträgt: $\frac{J_E - J_Z}{J_Z} = \frac{J_E}{J_Z} - 1 = \frac{5/8}{1/2} - 1 = 25\%$