Physik-Praktikum: TRÄ

Einleitung

Zu den Größen, die eine Translationsbewegung beschreiben, gibt es analoge Größen für Rotationsbewegungen. Sie sind alle vom Abstand von der Rotationsachse abhängig.
Der Kraft entspricht das Drehmoment ($M = F\ r$: die Kraft ist das Drehmoment, das an einem „Einheitshebel“ der Länge 1 angreift), der Geschwindigkeit entspricht die Winkelgeschwindigkeit (ω Geschwindigkeit auf dem Einheitskreis), und der trägen Masse das Trägheitsmoment ($J = m\ r^2$).
Außerdem gibt es noch den Drehimpuls, der analog zum Impuls als Produkt von Trägheitsmoment und Winkelgeschwindigkeit definiert ist.
Die Berechnung des Trägheitsmoments von ausgedehnten Körpern ist oft sehr kompliziert, weil es von der Entfernung der Massenelemente von der Rotationsachse abhängt, es ergeben sich umfangreiche Integrale.
Anschaulicher ist die experimentelle Messung des Trägheitsmoments, um die es in diesem Versuch geht.

Versuchsaufbau und Durchführung

Auf Drehtellern, die mit Drillfedern ausgestattet sind, werden die zu messenden Gegenstände befestigt, und die Schwingungsdauer wird mit Hilfe einer Lichtschranke gemessen. Die Schwingungsdauer hängt vom Trägheitsmoment ab, genauso wie bei linearen Schwingungen die Schwingungsdauer von der Masse abhängt.

Bestimmung der Winkelrichtgröße mit Hilfe der rückstellenden Kraft

Analog zum Hookschen Gesetz gilt für Drillfedern $M = -D^* \varphi$, man kann also die Winkelrichtgröße D^* mit Hilfe des Drehmoments bestimmen, wofür man die rückstellende Kraft und die Länge des Hebelarms bei einem gegebenen Winkel messen muss. Da bei Drillfedern die Winkelrichtgröße oft nicht symmetrisch ist, muss man die Messung für Auslenkungen in beide Richtungen machen.

$$D^* = \frac{-F\ r}{\varphi};$$

$\varphi\ (\pm 2° \triangleq 0{,}03)$	$F_1\ (\pm 0{,}02)\ [\mathrm{N}]$	$F_2\ (\pm 0{,}2)\ [\mathrm{N}]$	$D_1^*\ [\mathrm{N\ m}]$	$D_2^*\ [\mathrm{N\ m}]$
$\pi/2$	0,16	0,24	0,022	0,024
$-\pi/2$	0,16	0,23	0,022	0,023
π	0,38	0,50	0,026	0,025
$-\pi$	0,37	0,49	0,025	0,024

Dabei ist $r_1 = (0{,}215 \pm 0{,}002)\ \mathrm{m}$ und $r_2 = (0{,}157 \pm 0{,}002)\ \mathrm{m}$.

Es ergibt sich: $D^* = (0{,}024 \pm 0{,}001)\ \mathrm{N\ m}$.

Bestimmung der Winkelrichtgröße mit Hilfe des Trägheitsmoments bekannter Massen

Hierzu wird mit Hilfe einer Lichtschranke die Schwingungsdauer T des Drehtellers gemessen, zuerst ohne zusätzliche Massen (T_u), und dann mit zwei zylinderförmigen Massestücken, die an der Stange angebracht werden (T_1 , T_2). Das Trägheitsmoment dieser Massenstücke für die Rotation durch ihren Mittelpunkt lässt sich leicht berechnen, und mit Hilfe des Satzes von Steiner kann ihr Trägheitsmoment an der Stange über dem Drehteller befestigt berechnet werden. Aus diesem bekannten Trägheitsmoment kann mit der Formel

$$D^* = 4\ \pi^2 \frac{J_1}{T_1^2 - T_u^2} \quad (1)$$

die Winkelrichtgröße berechnet werden.

Bei einer Auslenkung von $\varphi = \pi/2$ wurden folgende Zeiten gemessen:
$T_1 = 2{,}891\ \mathrm{s}$, $T_2 = 1{,}778\ \mathrm{s}$, $T_u = 0{,}707\ \mathrm{s}$

Jedes Massestück hat $m = 64 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg}$, $r = 15 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}$, $h = 10{,}5 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}$, die Länge der Stange beträgt $l = 40 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m}$. Es ergibt sich:

$$J_{Zylinder} = m\left(\frac{r^2}{4} + \frac{h^2}{12}\right) = 4{,}2 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{kg\ m^2}\ ;$$

Trägheitsmoment beider Zylinder an der Stange in den Entfernungen $d_1 = 19{,}5 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m}$ und $d_2 = 11{,}35 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m}$:

$$J_{ZS} = 2 \cdot \left(J_{Zylinder} + m\ d^2 \right)\ ;$$

Mit (1) ergibt sich:
$D_1^* = 0{,}0245\ \mathrm{N\ m}$, $D_2^* = 0{,}0246\ \mathrm{N\ m}$;

Berechnung des Trägheitsmoments der Puppe

Statt der Massestücke wird die Puppe auf den Drehteller gespießt, und in drei verschiedenen Positionen die Schwingungsdauer gemessen. Mit Hilfe von (1) kann man daraus ihr Trägheitsmoment in den verschiedenen Positionen berechnen. Die Auslenkung betrug bei allen drei Messungen $\varphi = \pi/2$.

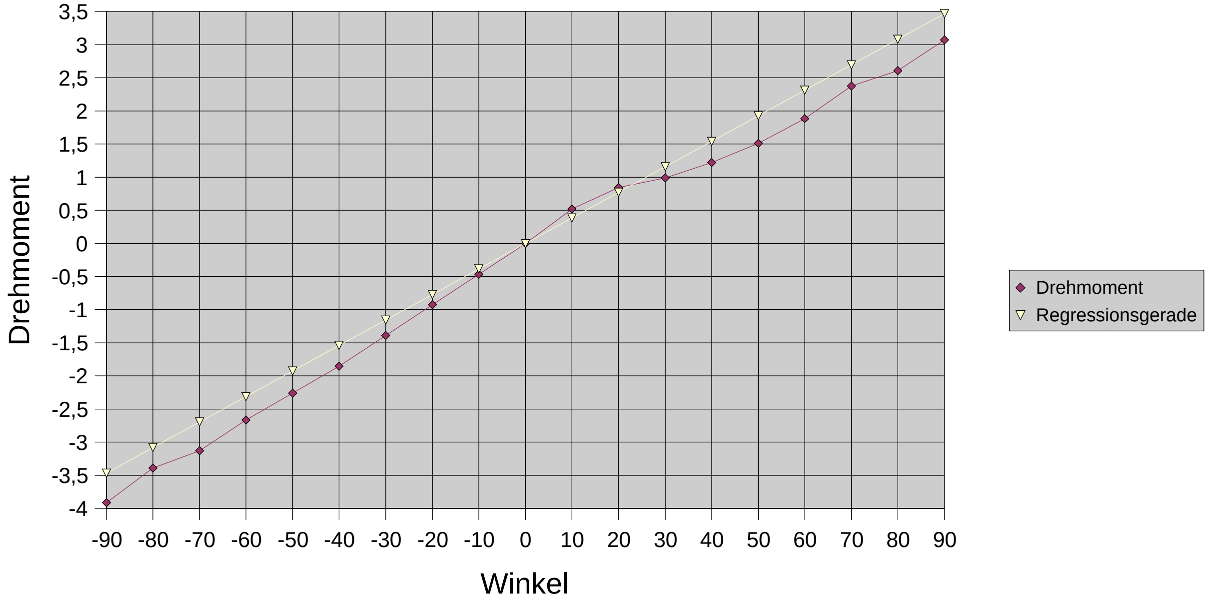
Zur Berechnung des Trägheitsmoments wird die Winkelrichtgröße aus der ersten Rechnung benutzt:
$D^* = \left(0{,}024 \pm 0{,}001\right)\ \mathrm{N\ m}$.

1. mit angelegten Armen:
   $T_{an} = \left(0{,}802 \pm 0{,}001\right)\ \mathrm{s}$
   $\Rightarrow \quad J_{an} = \left(8{,}7 \pm 0{,}6\right) \cdot 10^{-5}\ \mathrm{kg\ m^2}$;
2. mit ausgebreiteten Armen:
   $T_{aus} = \left(0{,}999 \pm 0{,}001\right)\ \mathrm{s}$
   $\Rightarrow \quad J_{aus} = \left(3{,}0 \pm 0{,}21\right) \cdot 10^{-4}\ \mathrm{kg\ m^2}$
3. mit Kopf und Hände nach vorne und Beine nach hinten gestreckt:
   $T_{max} = \left(1{,}28 \pm 0{,}001\right)\ \mathrm{s}$
   $\Rightarrow \quad J_{max} = \left(6{,}9 \pm 0{,}4\right) \cdot 10^{-4}\ \mathrm{kg\ m^2}$

Verhältnis des Trägheitsmoments mit ausgebreiteten Armen zum Trägheitsmoment mit angelegten Armen:

$$\frac{J_{aus}}{J_{an}} = 3{,}4$$

Berechnung der Winkelrichtgröße für den großen Drehteller, Berechnung des Trägheitsmoments des unbelasteten Drehtellers



Steigung der Regressionsgerade: $\Delta\ M/\Delta\ \varphi=0{,}0385$; in Bogenmaß: $D^*=2{,}21\ \mathrm{N\ m}$;
Messunsicherheit: $\Delta\ D^*=u_{D^*}=0{,}10$.

Schwingungsdauer des unbelasteten Tellers: $T_u=3{,}52\ \mathrm{s}$

$$T=2\ \pi\ \sqrt{\frac{J}{D^*}}\Rightarrow\ J=\frac{T^2\ D^*}{4\ \pi^2}=0{,}694\ \mathrm{kg\ m^2}\ .$$

Berechnung des theoretischen Trägheitsmoments aus den Dimensionen des Drehtellers:
Radius $r=30\cdot 10^{-2}\ \mathrm{m}$, Dicke $d=20{,}3\cdot 10^{-3}\ \mathrm{mm}$, Dichte von Aluminium $\varrho_{Alu}=2{,}7\cdot 10^3\ \mathrm{kg/m^3}$;

$$m_{Scheibe}=V_{Scheibe}\cdot\varrho_{Alu}=r^2\ \pi\cdot d\cdot\varrho_{Alu}=15{,}3\ \mathrm{kg}\ ;$$

$$J_{Scheibe}=m_{Scheibe}\ \frac{r^2}{2}=0{,}687\ \mathrm{kg\ m^2}\ .$$

Trägheitsmoment von Basti

Schwingungsdauer mit angelegten Armen: $T_{an}=6{,}06\ \mathrm{s}$;
Schwingungsdauer mit ausgebreiteten Armen: $T_{aus}=8{,}12\ \mathrm{s}$;

Mit (1):

$$J=\frac{D^*\ (T_1^2-T_u^2)}{4\ \pi^2}\ ;$$

$$J_{an}=1{,}36\ \mathrm{kg\ m^2}\ ;\ \ J_{aus}=3{,}00\ \mathrm{kg\ m^2}\ ;$$

$$\frac{J_{aus}}{J_{an}}=2{,}20\ ;$$

Extrapolation des Trägheitsmoments der Puppe auf Menschengröße

Verhältnis der Größen:

$$\frac{l_{Basti}}{l_{Puppe}}=\frac{180}{31}=5{,}8\ ;$$

Verhältnis der Massen:

$$\frac{m_{Basti}}{m_{Puppe}}=\frac{82\ \mathrm{kg}}{180\ \mathrm{g}}=455\ ;$$

Da in das Trägheitsmoment die Masse linear und der Radius quadratisch eingeht, ergibt sich:

$$\frac{J_{Basti}}{J_{Puppe}} = 5{,}8^2 \cdot 455 = 15{,}3 \cdot 10^3\ ;$$

Es ergeben sich also folgende Werte:

$$J_{Basti,\ an} = 15{,}3 \cdot 10^3 \cdot 8{,}7 \cdot 10^{-5} = 1{,}33\ \text{kg m}^2\ ;$$

$$J_{Basti,\ aus} = 4{,}59\ \text{kg m}^2\ ;$$

Berechnung des Trägheitsmoments des Körpers, als Zylinder genähert

Höhe des Zylinders: $h = 1{,}80\ \text{m}$; $m = 82\ \text{kg}$;

$$V = \frac{m}{\varrho_{Wasser}} = 82\ \text{dm}^3 = r^2\ \pi\ h\ ;$$

$$\Rightarrow\ r = \sqrt{\frac{V}{\pi\ h}} = 0{,}12\ \text{m}\ ,\quad J = \frac{1}{2}\ m\ r^2 = 0{,}59\ \text{kg m}^2\ .\ (2)$$

Der gemessene und der von der Puppe extrapolierte Wert sind relativ nah beieinander. Das Trägheitsmoment des als Zylinder genäherten Menschen ist aber etwa um die Hälfte zu klein. Offensichtlich reicht die Abweichung des Menschen von Zylinderform für einen derart drastischen Fehler aus; da die Entfernung von der Drehachse quadratisch in das Trägheitsmoment eingeht, kann das stimmen.

Die beiden Trägheitsmomente mit ausgebreiteten Armen unterscheiden sich stärker als bei angelegten Armen, vermutlich hat die Puppe einen im Verhältnis zu den Armen leichteren Körper (von den Proportionen ist die Puppe nämlich ziemlich menschenähnlich).

Berechnung des Trägheitsmoments des Körpers, als mehrere Zylinder und Kugel genähert (mit angelegten Armen)

Körperteil	*Radius [cm]*	*Höhe [cm]*	*Masse [kg]*	*Masse in % des Körper-gewichts*	*Abstand von Dreh-achse [cm]*	*J (angelegte Arme) [kg m²]*	*J (ausgestreckte Arme) [kg m²]*
Rumpf	15	70	49	57	0	0,55	
Arm	4	65	3,2	3,7	20	0,13	0,45
Bein	7	90	14	16	13	0,27	
Kopf	9,2		3,3	3,8	0	0,01	
Summe			86,7				

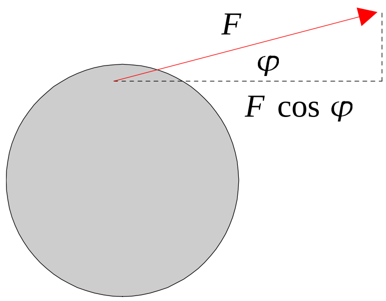
Das gesamte Trägheitsmoment mit angelegten Armen ist also: 1,36 kg m²
Mit ausgebreiteten Armen: 2,00 kg m²

Das berechnete Trägheitsmoment mit angelegten Armen stimmt ziemlich genau mit dem Messergebnis überein, das Trägheitsmoment mit ausgebreiteten Armen ist jedoch um ein Drittel zu niedrig berechnet. Ursache ist offenbar die Ungenauigkeit bei der Messung der Dimensionen der Körperteile, die Arme wurden zu kurz und/oder zu dünn gemessen. Wenn man die prozentualen Massenanteile der Körperteile mit der Tabelle im Praktikumsheft vergleicht, stellt man fest, dass der Rumpf zu schwer und alle anderen Körperteile zu leicht sind. Die Abweichung ist beim Kopf am größten, das sollte aber praktisch keine Rolle spielen, weil er ebenso wie der Rumpf über der Drehachse sitzt. Die Abweichung bei Armen und Beinen sind recht gering (pro Arm/Bein weniger als 1 %), anscheinend wirkt sich das trotzdem so stark aus.

Bei dieser großen Abweichung ist es daher wohl eher Zufall, dass die Gesamtmasse, die sich aus den gemessenen Längen und Radien ergibt, sowie das Trägheitsmoment bei angelegten Armen erstaunlich exakt stimmen. Daher sehe ich wenig Chancen, die gemessenen Dimensionen mit „Trial & Error“ zu verändern, dass das Trägheitsmoment passt; besser wäre es, die Messungen sorgfältiger zu wiederholen und dabei an mehr Stellen zu messen und zu mitteln, mit einem Maßband den Umfang statt mit dem Meterstab den Radius zu messen, und schließlich die Messung ohne Kleidung zu machen, die ein genaues Messen verhindert.

Fragen

Welchen Fehler (in %) begehen Sie, wenn Sie bei der Messung der Tangentialkräfte (Abb.5) nicht exakt tangential ziehen, sondern um 5° bzw. 10° vom rechten Winkel abweichen?



In diesem Fall misst man eine höhere Kraft, deren Tangentialkomponente die wirkliche Kraft ist:
$F_{tangential} = F_{mess} \cdot \cos \varphi$.
Man macht also einen Messfehler von
$$\frac{F_{mess} - F_{tangential}}{F_{tangential}} = \frac{F_{mess}\,(1 - \cos \varphi)}{F_{mess} \cdot \cos \varphi} = \frac{1 - \cos \varphi}{\cos \varphi} ,$$
das entspricht
0,38 % bei 5°
1,5 % bei 10°

Bei kleinen Winkeln ist dieser Fehler also praktisch vernachlässigbar.

Das Trägheitsmoment einer Modellpuppe (mit angelegten Armen und Beinen) bezüglich einer Achse durch die Längsachse der Puppe und durch den Schwerpunkt betrage $J = 0{,}60$ kgcm² . Wie groß ist es bezüglich einer um 1 cm parallel versetzten Drehachse? Die Masse der Puppe betrage 180 g.

Satz von Steiner:
$$J_{gesamt} = J + m \cdot a^2 = 0{,}60 \text{ kg cm}^2 + 0{,}180 \text{ kg} \cdot (1 \text{ cm})^2 = 0{,}78 \text{ kg cm}^2 .$$

Im Versuch wird das Trägheitsmoment der Trägheitsstange mit den kleinen Messingzylindern berechnet. Welchen Unterschied (Angabe in Prozent) macht es, ob das Trägheitsmoment des Zylinders gemäß der Formel (3.4) bezüglich der Drehachse der Drillfeder exakt berechnet wird oder der Zylinder als punktförmig angenommen wird? Abstand Drehachse - Zylindermitte 10 cm; Höhe des Zylinders = 8,5 mm; Durchmesser des Zylinders = 3 cm. Dichte von Messing = 8,33 g/cm³ .

Masse des Zylinders:
$$m = \varrho_{Messing} \cdot V = \varrho_{Messing} \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 \pi\ h = 0{,}050 \text{ kg} ;$$

Trägheitsmoment, wenn Zylinder als Massenpunkt gesehen wird:
$$J = m\ a^2 = 5{,}0 \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2$$

Trägheitsmoment eines Zyllinders bei Rotation um die Querachse:

$$J_{Zyl} = m\left(\frac{r^2}{4} + \frac{h^2}{12}\right) = 3{,}1 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{kg\ m^2}$$

Verschoben auf die Entfernung a mit dem Satz von Steiner:

$$J = J_{Zyl} + m\ a^2 = 5{,}0 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{kg\ m^2}$$

$$\psi = \frac{\cancel{m}\left(\frac{r^2}{4} + \frac{h^2}{12} + a^2\right)}{\cancel{m}\ a^2} = 1{,}0062\ ;\Rightarrow \Delta = \psi - 1 = 0{,}62\ \%$$

Der Unterschied ist also vernachlässigbar im Rahmen der Messgenauigkeit; der Abstand von der Drehachse wirkt sich sehr viel stärker aus als die Dimension des Körpers.

Mit einem T-Y-Schreiber kann die Amplitude der Schwingung des unbelasteten Drehtellers über längere Zeit aufgezeichnet werden.
a) Wie kann daraus die Dämpfung gewonnen werden?
b) Diskutieren Sie den Unterschied der Schwingungsdauer mit bzw. ohne Dämpfung (größer oder kleiner; Formel)?

a) Die Dämpfungsfunktion ist die Einhüllende des Schwingungsgraphen, eine e-Funktion.
Es gilt für eine gedämpfte Schwingung bei zwei aufeinanderfolgenden Amplituden:

$$\frac{A(t+T)}{A(t)} = e^{-\lambda T}$$

$$\lambda = \frac{\ln(A(t)) - \ln(A(t+T))}{T}.$$

Wenn man also die Schwingung auf halblogarithmischem Papier aufträgt, dann ist gemäß dieser Formel die Steigung der Einhüllenden gleich der Dämpfungskonstante.

b) Für eine gedämpfte Torsionsschwingung gilt:

$$T = 2\ \pi \sqrt{\frac{J - \lambda^2}{D^*}}.$$

Die Schwingungsdauer wächst also bei gedämpften Schwingungen mit der Dämpfungskonstante.

Berechnen Sie das Trägheitsmoment des Menschen als Zylinder (Formel (11)) und als elliptischer Zylinder. Nehmen Sie an, dass beim elliptischen Zylinder die große Halbachse doppelt so groß wie die kleine Halbachse sein soll. Beachten Sie, dass die Gesamtmasse der Person dabei konstant bleibt. Um wieviel Prozent ist das elliptische Trägheitsmoment größer als das zylindrische Trägheitsmoment? Diese Aufgabe gibt einen ersten Hinweis auf die Größenordnung der Unterschiede zwischen verschiedenen Modellen.

Das Trägheitsmoment als Zylinder wurde schon in (2) berechnet: $J_{Zylinder} = \frac{1}{2}\ m\ r^2 = 0{,}59\ \mathrm{kg\ m^2}$.

Höhe des Zylinders: $h = 1{,}80\ \mathrm{m}$;
Masse $m = 82\ \mathrm{kg}$;

$$V_{elliptisch} = a\ b\ \pi\ h = (2\ b)\ b\ \pi\ h = 2\ b^2\ \pi\ h = \frac{m}{\varrho_{Wasser}};$$

$$\Rightarrow\ b^2 = \frac{m}{2\ \varrho_{Wasser}\ \pi\ h};\ b = 8{,}5\ \mathrm{cm};$$

Trägheitsmoment eines elliptischen Zylinders:

$$J_{elliptisch} = \frac{m}{4}\left(a^2 + b^2\right) = \frac{m}{4}\left(4\ b^2 + b^2\right) = 5\ \frac{m}{4}\ b^2 = 5\ \frac{m}{4}\ \frac{m}{2\ \varrho_W\ \pi\ h} = \frac{5}{8}\ \frac{m^2}{\varrho_W\ \pi\ h} = 0{,}74\ \mathrm{kg\ m^2}$$

$$\frac{J_{elliptisch} - J_{Zylinder}}{J_{Zylinder}} = \frac{\frac{5}{8}\ \frac{m^2}{\varrho_{Wasser}\ \pi\ h} - \frac{1}{2}\ m\ r^2}{\frac{1}{2}\ m\ r^2} = \frac{5}{8}\ \frac{2\ \pi\ h\ m\ \varrho_{Wasser}}{\varrho_{Wasser}\ \pi\ h\ m} - 1 = \frac{10}{8} - 1 = \frac{1}{4} \equiv 25\ \%$$