Ein Skript der Vorlesung

# Mathematik für Physiker
# Lineare Algebra

Prof. Peter Vogl
TU München
1. Semester, WS 1999 / 2000

von Michael Wack, Christoph Moder, Manuel Staebel

*http://www.skriptweb.de*

*Hinweise (z.B. auf Fehler) bitte per eMail an uns: mail@skriptweb.de - Vielen Dank.*

# Inhaltsverzeichnis

1. Lineare Gleichungssysteme und Matrizen....3
Das Gaußsche Lösungsverfahren....5
2. Matrixmultiplikation....10
3. Vektorräume....15
3.1 Der abstrakte Vektorraum....15
3.2 Unterräume und Linearkombinationen....15
3.3 Basis und Dimensionen....19

## 1. Lineare Gleichungssysteme und Matrizen

**Definition (Matrix)**: Eine Matrix vom Typ $m \times n$ ist ein rechteckiges Zahlenschema der Form

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

Die Zahlen $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$ heißen **Komponenten** oder **Elemente** der Matrix A. Wir schreiben $A = (\alpha_{ij})_{m \times n}$ oder nur $A = (\alpha_{ij})$ .

Die $m \times 1$ - (oder $1 \times n$ ) Matrix heißt **Spaltenvektor** (oder **Zeilenvektor**), sie haben die Form

$\vec{s} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{z} = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$

Zwei Matrizen heißen gleich, wenn sie vom gleichen Typ sind;
$\alpha_{ij} = \beta_{ij} \quad \forall\, i, j \in \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\}$

**Definition**: Die Menge aller $m \times n$ -Matrizen mit Komponenten aus $\mathbb{R}$ schreibt man $\mathbb{R}^{m \times n}$ . Ferner $\mathbb{R}^n := \mathbb{R}^{n \times 1}$ Menge aller Spaltenvektoren, $\mathbb{R}_n := \mathbb{R}^{1 \times n}$ Menge aller Zeilenvektoren.

**Definition**: Für $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ wird $A = B$ und $\lambda A$ komponentenweise definiert, z.B.: $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & -5 \end{pmatrix}$ .

**Lemma**: Jeder Spaltenvektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ lässt sich eindeutig darstellen:

$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \ldots + \alpha_n \vec{e}_n \quad ; \quad \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Das System $(\vec{e}_1 \ldots \vec{e}_n)$ der $\vec{e}_1 \in \mathbb{R}^n$ heißt **natürliche Basis** des $\mathbb{R}^n$ . Analog dazu wird das aus $\vec{e}_1\,' := (1, 0, \ldots) \ldots \vec{e}_n\,' (0, 0, \ldots, 1)$ bestehende System aus Zeilenvektoren aus $\mathbb{R}_n$ die natürliche Basis des $\mathbb{R}_n$ genannt.

$0 := \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ nennt man **Nullmatrix** vom Typ $m \times n$ .

Die Nullmatrix $0 = \mathbb{R}^n \ (0 = \mathbb{R}_n)$ heißt **Nullvektor**.

**Lemma**: Es gelten die Rechengesetze $A, B, C \in \mathbb{R}^{m \times n}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ :

a) $A + B = B + A$ kommutativ

b) $(A+B)+C=A+(B+C)$ assoziativ
c) $A+0=A$ neutrales Element
d) $A+(-A)=0$ inverses Element
e) $(\lambda\ \mu)\ A=\lambda\ (\mu\ A)$
f) $1\cdot A=A$
g) $(\lambda+\mu)\cdot A=\lambda\ A+\mu\ A$ Distributivgesetz
h) $\lambda\ (A+B)=\lambda\ A+\lambda\ B$

***Bemerkung**:* $3\ A=(3\ \alpha_{ij})$

*Ein reelles lineares Gleichungssystem mit m linear unabhängigen Gleichungen für m unbekannte* $x_1 \dots x_n$ *hat die Form*

$$\alpha_{11}\ x_1+\alpha_{12}\ x_2+\ldots+\alpha_{1n}\ x_n=\beta_1$$
$$\vdots$$
$$\alpha_{m1}\ x_1+\alpha_{m2}\ x_2+\ldots+\alpha_{mn}\ x_n=\beta_m$$

*mit den Koeffizienten* $\alpha_{ij}\in\mathbb{R}$ *und den **Absolutgliedern*** $\beta_i\in\mathbb{R}$ *. Dafür schreibt man kurz* $A\ \vec{x}=\vec{b}$ *mit der Koeffizientenmatrix* $A=(\alpha_{ij})\in\mathbb{R}^{m\times n}$ *, dem Spaltenvektor* $\vec{x}$ *mit den unbekannten Komponenten* $x_i$ *und dem Spaltenvektor* $\vec{b}=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}$ *der rechten Seite.*

Das LGS heisst homogen, wenn $\vec{b}=0$ , sonst heisst es inhomogen.

**Definition**: Ein Spaltenvektor $\vec{c}\in\mathbb{R}^n$ mit den Komponenten $c\in\mathbb{R}$ heisst eine **Lösung** von $A\ \vec{x}=\vec{b}$ , wenn für $x_i = c_i$ $(1\le i\le n)$ die m Gleichungen tatsächlich erfüllt sind, d.h. wenn $A\ \vec{c}=\vec{b}$

***Bemerkung**: Ein homogenes System* $A\ \vec{x}=0$ *besitzt stets mindestens eine Lösung, nämlich die Nulllösung oder triviale Lösung* $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$

**Lemma**: Nicht jedes LGS ist lösbar. Es treten 3 folgende Fälle auf:

A) Das LGS besitzt keine Lösung

Bsp: $$\begin{aligned}3\ x_1+2\ x_2&=1\\ 3\ x_1+2\ x_2&=2\end{aligned}$$

B) Das LGS besitzt genau eine Lösung

Bsp: $$\begin{aligned}3\ x_1+2x_2&=1\\ 3\ x_1+x_2&=5\\ x_1=3;\ x_2&=-4\end{aligned}$$

C) Das LGS besitzt $\infty$ viele Lösungen

Bsp: $3\ x_1+2\ x_2=1\Rightarrow x_1=\frac{1}{3}(1-2\ \lambda)\ ,\ x_2=\lambda\quad\forall\ \lambda\in\mathbb{R}$

**Definition**: 2 LGS $A\ \vec{x}=\vec{b}\ ,\ B\ \vec{x}=b\ \vec{c}$ für $x_1,\ \ldots,\ x_n$ (nicht notwendig mit derselben Anzahl von Gleichungen) heißen **äquivalent**, wenn sie dieselbe Lösungsmenge besitzen.

**Lemma**: Bei folgenden Umformungen geht das LGS der Form $A\,\vec{x}=\vec{b},\ A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ in ein äquivalentes über:

1) Vertauschung zweier Gleichungen $\Leftrightarrow$ Vertauschung zweier Zeilen in A und $\vec{b}$
2) Multiplikation einer Gleichung mit $a\neq 0$ $\Leftrightarrow$ Multiplikation einer Zeile von A und $\vec{b}$ mit $\alpha\neq 0$
3) Addition (bzw. Subtraktion) des Vielfachen einer Gleichung zu (bzw. von) einer anderen $\Leftrightarrow$ Addition (bzw. Subtraktion) des $\alpha$ -fachen einer Zeile zu einer anderen.

**Beweis**: Da diese Umformungen vom gleichen Typ rückgängig gemacht werden können, ändern sie nichts an der Lösungsmenge.

**Definition**: Zum LGS $A\,\vec{x}=\vec{b}$ definiert man die erweiterte Koeffizientenmatrix

$$(A|\vec{b}):=\left(\begin{array}{ccc|c}\alpha_{1\,1} & \cdots & \alpha_{1\,n} & \beta_1\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ \alpha_{m\,1} & \cdots & \alpha_{m\,n} & \beta_m\end{array}\right)$$

**Lemma**: Entsteht $(B|\vec{c})$ aus $(A|\vec{b})$ durch endlich viele elementare Zeilenumformungen, dann ist $A\,\vec{x}=\vec{b}$ und $B\,\vec{x}=\vec{c}$ äquivalent.

**Beispiel**:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ 8 & 9 & 10\end{pmatrix}$$ ; erste Zeile mal zwei

$$B=\begin{pmatrix}2 & 4 & 6\\ 2 & 4 & 6\\ 8 & 9 & 10\end{pmatrix}$$ ; und abziehen

$$C=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 2 & 4 & 6\\ 8 & 9 & 10\end{pmatrix}$$

$A\,\vec{x}=0$ , $B\,\vec{x}=0$ , $C\,\vec{x}=0$ sind äquivalent.

## Das Gaußsche Lösungsverfahren

1) das homogene Systgem $A\,\vec{x}=0$ :

Das Gaußsche Eliminationsverfahren besteht aus zwei Teilen:

a) der Vorwärtselimination
b) der Rückwärtssubstitution

Verfahren:

a) Man bringt durch Zeilenvertauschung eine Zahl $\neq 0$ an die 1-1-Position, d.h. $\alpha_{11}\neq 0$ . Dann annuliert man die darunterstehenden Zahlen durch Substraktion eines passenden Vielfachen der 1.

Zeile von der zweiten, dritten, ... , letzten Zeile. D.h.:

2. Zeile: 2. Zeile - $\frac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}}$ erste Zeile

3. Zeile: 3. Zeile - $\frac{\alpha_{31}}{\alpha_{11}}$ erste Zeile

usw.

Auf diese Weise entsteht aus A eine Matrix B:

$$B = \begin{pmatrix} P & * & * & * & \cdots \\ 0 & * & * & * & \cdots \\ 0 & * & * & * & \cdots \\ 0 & * & * & * & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ 0 & * & * & * & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & * & * & * & * \\ & & A_1 & & \end{pmatrix}$$

Es kann sein, dass nicht nur die 1. Spalte von $A_1$ $\left((m-1)\times n-\text{Matrix}\right)$ Null ist, sondern die vorderen s Spalten. Im Falle $A_1 = 0$ ist die Elimination beendet. Andernfalls wiederholt man im 2. Eliminationsschritt denselben Rechenschritt an der ersten von Null verschiedenen Spalte von $A_1$ , bis man nach höchstens $m-1$ Schritten zu einer Matrix gelangt, die eine sog. **Zeilenstufenform** besitzt:

$$M = \begin{pmatrix} \underline{|X} & x & x & x & x & x & x & x & x & x & \cdots \\ 0 & 0 & \underline{|X} & x & x & x & x & x & x & x & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \underline{|X} & x & x & x & x & x & x & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{|X} & x & x & x & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{|X} & x & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{|X} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} m \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} m-r \end{array} \qquad (*)$$

Kennzeichen der Zeilenstufenform:

1. In jeder Zeile stehen links vor dem **Pivotelement** nur Nullen.
2. Liest man von oben nach unten, so rückt das Pivotelement um mindestens eine Stelle nach rechts.

Das homogene LGS $M\ \vec{x} = 0$ ist äquivalent zu $A\,\vec{x} = 0$ .

b) Rückwärtssubstitution:

**Beispiel**:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ . Das entspricht $M\ \vec{x} = 0$ .

$x_1 - 2\ x_2 + 3\ x_3 + 4\ x_4 + 2\ x_5 = 0$ ;
$2\ x_3 + x_4 - 4\ x_5 = 0$ ;
$-x_4 + 3\ x_5 = 0$ ;

beschreibt nur die Abhängigkeit der zu den Pivotstellen gehörenden Unbekannten $x_1 , x_3 , x_4$ (man nennt sie die **abhängigen** Variablen) von $x_2 , x_5$ , die beliebig gewählt werden können und daher **unabhängige Variable** oder **freie Parameter** heißen. Man kann also setzen:

$$x_2 = \lambda_1 , x_5 = \lambda_2 \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

dann folgt **von unten nach oben**:

$$x_4 = 3\, x_5 = 3\, \lambda_2 \;;$$
$$x_3 = \frac{1}{2} \lambda_2 \;;$$
$$x_1 = 2\, \lambda_1 - 15{,}5\, \lambda_2 \;;$$

Diese Lösung heißt **allgemeine Lösung**, jede spezielle für festes $\lambda_1 , \lambda_2$ **partikuläre Lösung**.

**Allgemein**:

1. Die in (*) zu den Spalten ohne Pivot-Stelle gehörenden Unbekannten sind die freien Variablen, sie werden der Reihe nach gleich $\lambda_1 , \lambda_2 , \ldots , \lambda_{n-r}$ gesetzt.
2. Im (*) zugehörige Lösung bringt man die freien Variablen auf die rechte Seite, ersetzt sie sie durch die $\lambda_i$ und berechnet der Reihe nach von unten nach oben die zu den Pivotstellen gehörenden abhängigen Variablen. Dies liefert die allgemeine Lösung des LGS.

**Beispiel**:

1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \\ 3 & -7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 2-2 & -3+8 & -1 \\ 3-3 & -7+12 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 5-5 & 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

;

$$x_1 - 4\, x_2 = 0 \;;$$
$$5\, x_2 - x_3 = 0 \;;$$
$$2\, x_3 = 0 \;;$$
$$\Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0$$

2) $$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & -5 \\ 3 & -7 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to M = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_3 = \lambda_1 , x_4 = \lambda_2 \;;$$

Rückwärtssubstitution: $x_2 = x_3 + x_4 = \lambda_1 + \lambda_2$ , $x_1 = 4\, x_2 - 2\, x_3 = 2\, \lambda_1 + 4\, \lambda_2$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**Definition**: Die Anzahl der von 0 verschiedenen Zeilen (also die Anzahl der Pivotstellen) in der aus A mittels Gauß-Elimination erzielten Zeilenstufenmatrix M heißt der **Rang von A**, in Zeichen:
Rang A.

***Bemerkung**: Später werden wir zeigen, dass Rang A nur von A und nicht von speziellen Eliminationsschritten abhängt.*

**Satz 1.1**: Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ :

a) Das homogene LGS $A\,\vec{x} = 0$ hat genau dann als einzige Lösung $x_1 = \ldots = x_n = 0$ , wenn Rang A = n

b) Die allgemeine Lösung des $A\,\vec{x} = 0$ enthält $n - (Rang\ A)$ freie Variable.

c) Ist die Anzahl der Gleichungen kleiner als die Anzahl der Unbekannten ( $m - n$ ), dann besitzt $A\,\vec{x} = 0$ von Null verschiedene Lösungen.

**Beweis**:

b) Es gibt n - Rang A Spalten in M ohne Pivotstelle. Jede der zugehörigen Variablen ist frei.

a) Gibt es in jeder Spalte ein Pivotelement (Rang A = n), dann gibt es keine freien Variablen, die Rückwärtssubstitution $x_n = 0 \Rightarrow x_{n-1} = 0 \ldots \Rightarrow x_1 = 0$

c) Aus $Rang\ A \leq m$ und $m < n$ $\Rightarrow$ $n - Rang\ A \geq n - m \geq 1$ . Also enthält die allgemeine Lösung von $A\,\vec{x} = 0$ wenigstens eine freie Variable. Man setze $x_k = \lambda = 1$ .

2) Das inhomogene LGS $A\,\vec{x} = \vec{b}$

In diesem Fall Lösungsweg:

a) Vorwärtselimination an $(A|\vec{b})$

b) Lösbarkeitsentscheidung

c) Rückwärtssubstitution

a) $(A|\vec{b}) \rightarrow (M|\vec{d})$ mit M; Zeilenstufenform

$$(M|\vec{d}) = \left[\begin{array}{cccccccc|c} P & * & * & * & * & * & \cdots & * & \delta_1 \\ 0 & 0 & P & * & * & * & \cdots & * & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P & * & \cdots & * & \delta_r \\ & & & & & & & & \delta_{r+1} \\ & & & & & & & & \vdots \\ & & & & & & & & \delta_m \end{array}\right]$$

b) ist eine der Zahlen $\delta_{r+1}, \ldots, \delta_m \neq 0$ , ist das Gleichungssystem nicht lösbar.

**Beweis**: Sei $\delta_{r+1} \neq 0$ . Dann ist die (r + 1)-te Gleichung $0\,x_1 + 0\,x_2 + \ldots + 0\,x_n = \delta_{r+1} \neq 0$ Widerspruch!

c) Anzahl der freien Variablen: Ist $A\,\vec{x} = \vec{b}$ lösbar, so enthält die allgemeine Lösung n - Rang A freie Variable.

d) Im Falle $\delta_{r+1} = ... = \delta_m = 0$ verfährt man wie im homogenen Fall. Es ist in diesem Fall einfacher, zuerst die partikuläre Lösung $\vec{v}_0$ zu bestimmen, in der sämtliche freien Variablen den Wert Null haben und dann die allg. Lösung des homogenen Systems $M\,\vec{x} = 0$ zu bestimmen.

**Satz 1.2**:

Sei $A \in \mathbb{R}^{mxn}$ , $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$

a) Lösbarkeitstest: Das LGS $A\,\vec{x} = \vec{b}$ ist genau dann lösbar, wenn gilt
Rang $(A|\vec{b}) =$ Rang A

b) Struktur der Lösungsmenge: Ist $A\,\vec{x} = \vec{b}$ lösbar, dann läßt sich die allgemeine Lösung darstellen in der Form
$\vec{a} = \vec{v}_0 + \vec{u}$
mit einer partikulären Lsg $\vec{v}_0$ von $A\,\vec{x} = \vec{b}$ und der allgemeinen Lösung des
$A\,\vec{x} = 0$ .

c) Anzahl der freien Variablen: Ist $A\,\vec{x} = \vec{b}$ lösbar, dann enthält die allgemeine Lösung n - (Rang A) (n = # der Unbekannten) freie Variable.

**Beweis**:

a) Bedingung $\delta_{r+1} = \ldots \delta_m = 0 \Leftrightarrow$ die aus A und $(A|\vec{b})$ erzielten Zeilenstufenmatrizen haben die gleiche Anzahl von Pivotelementen, also Rang $A =$ Rang $(A|\vec{b})$ .

b) mit $A\,\vec{u} = 0$ und $A\,\vec{v}_0 = \vec{b}$ gilt $A\left(\vec{v}_0 + \vec{u}\right) = \vec{b}$ . Umgekehrt folgt aus $A\,\vec{v} = \vec{b}$ , $A\,\vec{v}_0 = \vec{b}$
$\Rightarrow$ $u := \vec{v} - \vec{v}_0$ erfüllt $A\,\vec{u} = 0$ .

c) Folgt aus b) und Satz 1.1.

**Beispiel**: $5\,x - 7\,y = 3$ ; $-10\,x + 14\,y = -6$ ;

$A = \left(\begin{array}{cc|c} 5 & -7 & 3 \\ -10 & 14 & -6 \end{array}\right) \Rightarrow M = \left(\begin{array}{cc|c} 5 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ ; $x_2 = 0$ (freie Variable);

$5\,x_1 - 7\,x_2 = 3 \Rightarrow x_1 = \frac{3}{5}$ partikuläre Lösung.

homogenes Gleichungssystem: $\begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$ ; $x_2 = \lambda_2$ ; $5\,x_1 - 7\,x_2 = 0$ ; $x_1 = \frac{7}{5}\lambda_2$ allg. hom.

Somit: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} \frac{7}{5} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ 0 \end{pmatrix}$ .

## 2. Matrixmultiplikation

**Definition**: Das Produkt $\vec{a}\cdot\vec{b}$ eines Zeilenvektors $\vec{a}\in\mathbb{R}_n$ und eines Spaltenvektors $\vec{b}\in\mathbb{R}^n$ ist definiert durch:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(\alpha_1\ \dots\ \alpha_n)\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\ \beta_i\quad .$$

***Bemerkung**: Es gilt offenbar* $(\vec{a}_1+\vec{a}_2)\cdot\vec{b}=\vec{a}_1\ \vec{b}+\vec{a}_2\ \vec{b}$ ; $\alpha\ (\vec{a}\cdot\vec{b})=(\alpha\ \vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\alpha\ \vec{b})$ ; $\forall\ \vec{a}\ ,\ \vec{a}_1\ ,\ \vec{a}_2\ ,\in\mathbb{R}_n\ ,\ \vec{b}\in\mathbb{R}^n$

**Definition**: Das Produkt einer $m\times n$ -Matrix $A=(\alpha_{i\ j})_{m\times n}=\begin{pmatrix}\vec{z}_1\\ \vdots\\ \vec{z}_m\end{pmatrix}$ mit einer $n\times r$ -Matrix $B=(\beta_{i\ j})_{m\times n}=\left(\vec{s}_1\ ,\ \dots\ ,\ \vec{s}_r\right)$ ist definiert durch

$$A\cdot B:=\begin{pmatrix}\vec{z}_1\cdot\vec{s}_1 & \cdots & \vec{z}_1\cdot\vec{s}_r\\ \vdots & & \vdots\\ \vec{z}_m\cdot\vec{s}_1 & \cdots & \vec{z}_m\cdot\vec{s}_r\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{m\times n}$$

$$(A\ B)_{i\ j}=:\ c_{i\ j}=\vec{z}_i\cdot\vec{s}_j=(\alpha_{i\ 1}\dots\alpha\ i\ n)\begin{pmatrix}\beta_{1\ j}\\ \vdots\\ \beta_{n\ j}\end{pmatrix}=\sum_{k=1}^{n}\alpha\ i\ k\ \beta_{k\ j}\quad ;$$

$$1\le i\le m\ ,\ 1\le j\le r\quad ;$$

$$C=A\cdot B$$
$$c_{i\ j}=\sum_{k=1}^{n}\alpha_{i\ k}\ \beta_{i\ j}$$

**Rechenregeln**:

Das für $A=(\alpha_{i\ j})_{m\times n}$ und dem Spaltenvektor $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$ berechnete Produkt $A\cdot\vec{x}$ lautet:

$$\begin{pmatrix}\alpha_{1\ 1} & \alpha_{1\ 2} & \cdots & \alpha_{1\ n}\\ \vdots & & & \vdots\\ \alpha_{m\ 1} & \alpha_{m\ 2} & \cdots & \alpha_{m\ n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_{1\ 1}\ x_1+\alpha_{1\ 2}\ x_2+\dots+\alpha_{1\ n}\ x_n\\ \vdots\\ \alpha_{m\ 1}\ x_1+\alpha_{m\ 2}\ x_2+\dots+\alpha_{m\ n}\ x_n\end{pmatrix}$$

$$A\cdot\vec{x}=\vec{b}$$

**Satz 2.1**: Rechenregeln $A_i\in\mathbb{R}^{m\times n}$ , $B_i\in\mathbb{R}^{n\times r}$ , $C\in\mathbb{R}^{r\times s}$ :

a) $(A_1+A_2)\cdot B=A_1\cdot B+A_2\cdot B$ ; $A\cdot(B_1+B_2)=A\cdot B_1+A\cdot B_2$ ;

b) $\alpha\ (A\ B)=(\alpha\ A)\ B=A\ (\alpha\ B)\quad \alpha\in\mathbb{R}$ ;

c) $A\ (B\ C)=(A\ B)\ C\quad\in\mathbb{R}^{m\times s}$

d) $E_m\ A=A\ E_n=A$ , wobei $E_m=\begin{pmatrix}1 & & 0\\ & 1 & \\ 0 & & 1\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{m\times n}\quad E_n\in\mathbb{R}^{m\times n}$

e) $A\ B \neq B\ A$ im Allgemeinen, selbst wenn das Produkt definiert ist

**Beweis**: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 3+0\cdot 1 & 1\cdot 2+0\cdot 4 \\ 0\cdot 3+1\cdot 1 & 0\cdot 2+1\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ ;

**Definition (Transponierte)**: Jeder $m\times n$ -Matrix $A=(\alpha_{i\ j})$ zugeordnet ist die **transponierte Matrix** $A^T$, deren i-te Zeile aus den Koeffizienten der i-ten Spalte von A besteht.

$$A=(\alpha_{i\ j}) \Rightarrow A^T=(\beta_{i\ j}) \quad \text{mit} \quad \beta_{i\ j}=\alpha_{j\ i}$$

$$A=\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \ ; \quad A^T=\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{m1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{m2} \\ \vdots & & & \vdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \ ;$$

**Lemma:** Rechenregeln

$(A+B)^T=A^T+B^T$

$(\alpha\ A)^t=\alpha\ A^T$

$(A^T)^T=A$

$(A\ C)^T=C^T\ A^T$

für alle $A\in\mathbb{R}^{mxn}$ , $B\in\mathbb{R}^{mxn}$ , $C\in\mathbb{R}^{nxp}$

**Beweis:** Nur $(A\ C)^T=C^T\ A^T$

$A\ C\in\mathbb{R}^{mxp}$

$(A\ C)^T\in\mathbb{R}^{pxm}$

$C^T\in\mathbb{R}^{pxn}$

$A^T\in\mathbb{R}^{nxm} \Rightarrow C^T\ A^T\in\mathbb{R}^{pxm}$

$(A\ C)^T_{ig}=(A\ C)_{gi}=\sum_k a_{jk}\ c_{ki}$

$(C^T\ A^T)_{ig}=\sum_k C^T\ a^T_{kg}=\sum_k c_{ki}\ a_{jk}$

oder:

$$\vec{z}\ \vec{s}=(\alpha_1 \cdots \alpha_n)\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \vdots \\ \gamma_n\end{pmatrix}=\sum_i \alpha_i\ \gamma_i=(\gamma_1\cdots\gamma_n)\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}=\vec{s}^T\ \vec{z}^T$$

**Definition**: Eine $n\times n$ -Matrix heißt **symmetrisch**, wenn die transponierte Matrix $A^T$ gleich der Matrix $A$ ist. Sie heißt **schiefsymmetrisch**, wenn $A^T=-A$ ist. In Elementen:

$A^T=A \Leftrightarrow \alpha_{ij}=\alpha_{ji}\ (1\leq i\ ,\ j\leq n)$

$A^T=-A \Leftrightarrow \alpha_{ij}=-\alpha_{ji}\ (1\leq i\ ,\ j\leq n)$ , insbesondere $a_{ii}=0$ für schiefsymmetrische Matrix.

**Lemma**: Für jede Matrix $A\in\mathbb{R}^{n\times m}$ sind die Matrizen $A+A^T$ und $A\cdot A^T$ symmetrisch und $A-A^T$ schiefsymmetrisch.

**Beweis**: $(A+A^T)_{ij}=\alpha_{ij}+\alpha_{ji}$ ; $(A\ A^T)^T=(A^T)^T\cdot A^T=A\ A^T$

***Bemerkung**: Die Einheitsmatrix ist symmetrisch.*

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ symmetrische Matrix

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ schiefsymmetrische Matrix

**Beispiele**:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1\cdot 2+1\cdot 2 & -1\cdot 3+2\cdot 0 \\ 2\cdot 3+1\cdot 4 & 3\cdot 3+4\cdot 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 10 & 9 \end{pmatrix} \ ;$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2\cdot 1+3\cdot 3 & 2\cdot 2+3\cdot 4 \\ -1\cdot 1+0\cdot 3 & 1\cdot 2+0\cdot 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 16 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \ ;$$

**Definition**: Eine $m\times n$ -Matrix A heißt **invertierbar**, wenn $\exists\, B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ : $A\ B=B\ A=E$ .
In diesem Fall ist B eindeutig bestimmt, sie wird mit $A^{-1}$ bezeichnet und heisst **inverse Matrix** oder die **Inverse von A**.

**Satz 2.2 (Eindeutigkeit)**: Wenn es zu $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ zwei Matrizen $B, C\in\mathbb{R}^{n\times n}$ gibt mit $B\ A=A\ C=E$ , dann ist A invertierbar und $B=C=A^{-1}$ .

**Beweis**: $B=B\ E=B\,(A\ C)=(B\ A)\ C=E\ C=C$ ; also gilt: $B\ A=A\ B=E$ , und es gibt zu A keine andere Matrix.

**Beispiel**: 1. $E=E\ E$ ist invertierbar, $E^{-1}=E$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Für $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}$ mit $a\ d-b\ c\neq 0$

$$A^{-1}=\frac{1}{a\ d-b\ c}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

**Beweis**: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a\ d-b\ c & -a\ b+b\ a \\ c\ d-dc & -bc+ad \end{pmatrix}=(a\ d-b\ c)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A\ A^{-1}=E$
$A^{-1}\ A=E$

**Beispiel**: 1. $E=E\ E$ ist invertierbar, $E^{-1}=E$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Für $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}$ mit $a\ d - b\ c \neq 0$

$$A^{-1} = \frac{1}{a\ d - b\ c} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

**Beweis**: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\ d - b\ c & -a\ b + b\ a \\ c\ d - dc & -bc + ad \end{pmatrix} = (a\ d - b\ c) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A\ A^{-1} = E$
$A^{-1}\ A = E$

**Satz 2.3**:
a) Die Inverse einer invertierbaren Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist invertierbar: $(A^{-1})^{-1} = A$ .
b) Das Produkt zweier invertierbarer Matrizen $A\ , B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist invertierbar;
$(A\ B)^{-1} = B^{-1}\ A^{-1}$ .
c) Die Transponierte $A^T$ einer $n \times n$ -Matrix ist genau dann invertierbar, wenn A invertierbar ist. In diesem Falle gilt:
$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ .

**Beweis**: a), b): $A^{-1}\ A = E$ ; $B^{-1}\ A^{-1}\ (A\ B) = (A\ B)\ B^{-1}\ A^{-1} = E$ ;
c): $A\ A^{-1} = A^{-1}\ A = E$ ;
$(A\ A^{-1})^T = (A^{-1})^T\ A^T = E^T = E$ ;
$(A^{-1}\ A)^T = A^T\ (A^{-1})^T = E$ ;

***Bemerkung***: *Die Bedeutung der invertierten Matrizen für LGS ergibt sich aus:*
$A\ X = B$ *, mit* $B\ , X \in \mathbb{R}^{n \times k}$ *mit einer invertierbaren Matrix* $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *erhält man die eindeutige Lösung* $X = A^{-1}\ B$ .

**Satz 2.4**: Für eine $n \times n$ -Matrix A sind folgende Aussagen äquivalent:
a) A ist invertierbar

b) $\exists\ B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ; $A\ B = E$

c) $\exists\ C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ; $C\ A = E$

d) $A\ \vec{x} = 0 \Rightarrow \vec{x} = 0$ ;

e) Rang $A = n$

**Beweis**:
a) $\Rightarrow$ c): $C = A^{-1}$
c) $\Rightarrow$ d): $A\ \vec{x} = 0 \Rightarrow C\ A\ \vec{x} = 0 \Rightarrow E\ \vec{x} = 0 \Rightarrow \vec{x} = 0$
d) $\Rightarrow$ e): Satz von Rang A
c) $\Rightarrow$ b): Nach früherem Satz ist jedes LGS $A\ \vec{x} = \vec{b}$ mit $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ eindeutig lösbar, es gibt also zu den Vektoren $\vec{e}_i$ der natürlichen Basis des $\mathbb{R}^n$ genau einen Vektor $\vec{b}_i$ mit $A\ \vec{b}_i = \vec{e}_i$ . Also gilt für die $n \times n$ -Matrix $B = (\vec{b}_1\ , \ldots , \vec{b}_n)$ die Gleichung:

$A\ B = \left(A\ \vec{b}_1\ ,\ \ldots\ ,\ A\ \vec{b}_n\right) = \left(\vec{e}_1\ ,\ \ldots\ ,\ \vec{e}_n\right) = E$ .

b) $\Rightarrow$ a): Aus $A\ B = E$ folgt: $B^T\ A^T = E$ . Wegen dem bereits bewiesenen Schluss $c \Rightarrow e \Rightarrow b$ garantiert dies die Existenz einer $n \times n$ -Matrix D mit $A^T\ D = E$ . Also ist $A^T$ und damit A invertierbar.

Also: $a \Rightarrow c \Rightarrow d \Rightarrow e \Rightarrow b \Rightarrow a$ .

**Definition**: In einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißen die $\alpha_{ii}$ **Diagonalelemente**. Man sagt, sie stehen auf der Diagonalen von A. Unterhalb der Diagonalen stehen $\alpha_{ij}$ mit $i > j$ , oberhalb $\alpha_{ij}$ mit $i < j$ . Man nennt A eine **untere (obere) Dreiecksmatrix**, wenn sie höchstens auf und unterhalb (oberhalb) der Diagonalen von Null verschiedene Elemente hat.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & & \cdots & \alpha_{1n} \\ & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ & \vdots & & \vdots \\ 0 & & & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$ obere Dreiecksmatrix $\alpha_{ij}$ $j \geq i$ bzw. $i \leq j$

***Bemerkung***: $(\text{obere Dreiecksmatrix})^T = (\text{untere Dreiecksmatrix})$ ; $\alpha_{ij}^T = \alpha_{ji}$

**Satz 2.5:** Eine untere Dreiecksmatrix ist genau dann invertierbar, wenn sämtliche Diagonalelemente $\neq 0$ sind.

**Beweis:** Mit einer Dreiecksmatrix A hat das LGS $A\ \vec{x} = 0$ genau dann nur die triviale Lösung, wenn alle Diagonalelemente $\neq 0$ sind. Dann Satz über die Invertierbarkeit.

**Beispiel:** Spezielle Dreiecksmatrizen sind die Diagonalmatrizen.

$$\text{Diag}\ (\alpha_{1,}\ \alpha_{2,}\ \cdots\ ,\ \alpha_n) := \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$$

sind alle $\alpha_i \neq 0$: $\text{Diag}\ (\alpha_{1,}\ \cdots\ ,\ \alpha_n)^{-1} = \text{Diag}\ (\frac{1}{\alpha_{1,}}\ \cdots\ ,\ \frac{1}{\alpha_n})$

# 3. Vektorräume

## 3.1 Der abstrakte Vektorraum

**Definition (Vektorraum)**: Eine nichtleere Menge V, in der man zu je 2 Elementen $\vec{a}, \vec{b} \in V$ eine Summe $\vec{a} + \vec{b} \in V$ und $\forall\, \vec{a} \in V \wedge \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$ das Element $\lambda \cdot \vec{a} \in V$ bilden kann, heißt ein $\mathbb{R}$ - Vektorraum oder Vektorraum über $\mathbb{R}$ bzw. linearer Raum über $\mathbb{R}$, wenn folgende 8 Rechengesetze (die Vektorraum-Axiome) erfüllt sind:

(V1) Addition ist kommutativ: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \quad \forall\, \vec{a}, \vec{b} \in V$

(V2) Addition ist assoziativ: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \quad \forall\, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$

(V3) $\exists\, 0 \in V$, Nullelement oder Nullvektor mit $\vec{a} + 0 = \vec{a} \quad \forall\, \vec{a} \in V$

(V4) $\forall\, \vec{a} \in V \overset{1}{\exists} (-\vec{a}) \in V : \vec{a} + (-\vec{a}) = 0$

(V5) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a} \quad \forall\, \vec{a} \in V, (1 \in \mathbb{N})$

(V6) $\lambda\, (\mu\, \vec{a}) = (\lambda\, \mu)\, \vec{a} \quad \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \wedge \vec{a} \in V$

(V7) $\lambda\, (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\, \vec{a} + \lambda\, \vec{b} \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R} \wedge \vec{a}, \vec{b} \in V$

(V8) $(\lambda + \mu)\, \vec{a} = \lambda\, \vec{a} + \mu\, \vec{a} \quad \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \wedge \vec{a} \in V$

Die Elemente eines Vektorraums nennt man <u>Vektoren,</u> $\vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{a} - \vec{b}$ .

**Beispiel 1:** $\mathbb{R}^{mxn}$ ist bezüglich der komponentenweisen Addition und skalaren Multiplikation ein $\mathbb{R}$ - Vektorraum . $\Rightarrow$ Raum der „geometrischen Vektoren".

**Beispiel 2:** Die Menge aller reellen Polynome von Grad $\leq n$ ist mit der üblichen Addition und skalaren Multiplikation ein Vektorraum.

P(x) = 0

-P(x) ist neg. Elemente zu P(x)

**Beispiel 3:** Die Menge $C_I^0 = \{ f\!: I \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig} \}$ ist mit der punktweisen Addition und Multiplikation ein Vektorraum:

(f+g)(x) := f(x) + g(x)

$(\lambda\ f)\,(x) := \lambda\ f\,(x)$

$0\,(x) = 0 \quad \forall\, x \in I$

## 3.2 Unterräume und Linearkombinationen

V sei ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum

**Definition:** Eine nicht leere Teilmenge $U \subseteq V$ heißt Unterraum oder linearer Teilraum, wenn gilt:

(U1) $\forall\, \vec{u}, \vec{v} \in U \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} \in U$

(U2) $\forall\, \vec{u} \in U \wedge \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda\, \vec{u} \in U$

***Bemerkung:*** *Ein Unterraum „<u>erbt</u>" die Addition und skalare Multiplikation, man sagt, er ist <u>abgeschlossen</u> bezüglich dieser Operationen.*

**Beispiel 1:** V hat die trivialen Unterräume {0}, V.

**Beispiel 2:** Gegeben sei V und ein Element $\vec{v} \in V$. Dann ist $\mathbb{R}\,\vec{v} := \{\alpha\,\vec{v} \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ ein Unterraum. Wenn $V = \mathbb{R}^3$; besteht $\mathbb{R}\,\vec{v}$ aus allen zu $\vec{v}$ parallelen Vektoren.

**Beispiel 3:** $U := \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \text{ mit } 2\,\alpha_1 + 2\,\alpha_2 + \alpha_4 = 0 \right\}$ ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^4$.

$U := \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \text{ mit } 2\,\alpha_1 + 3\,\alpha_2 + \alpha_4 = 1 \right\}$ ist <u>kein</u> Unterraum!

**Beispiel 4:** $\forall\; A \in \mathbb{R}^{mxn}$ ist Kern A := $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\,\vec{x} = 0\}$ d.h. die Lösungsmenge eines homogenen Gleichungssystems ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$.

Gilt, weil $A\,(\lambda\,\vec{u}) = \lambda\,(A\,\vec{u}) = \lambda \cdot 0 = 0$

**Definition:** Jede aus endlich vielen Vektoren $\vec{v}_{1,}\ \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_n \in V$ gebildete Summe der Form $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i\,\vec{v}_i = \alpha_1\,\vec{v}_1 + \cdots + \alpha_k\,\vec{v}_k$ mit $\alpha_i \in \mathbb{R}$ heißt eine Linearkombination der $\vec{v}_i$.
Eine solche heißt <u>trivial</u>, wenn $\alpha_i = 0\ \forall\ i$. Die Menge aller Linearkombinationen der $\vec{v}_i$, $\text{Lin}\,(\vec{v}_{1,} \cdots, \vec{v}_k) := \left\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i\,\vec{a}_i \mid \alpha_i \in \mathbb{R},\ 1 \le i \le k \right\}$ heißt <u>lineare Hülle</u> der $\vec{v}_i$
.

**Lemma**: Die lineare Hülle Lin $(\vec{v}_{1,} \cdots, \vec{v}_k)$ mit $\vec{v}_i \in V$ ist ein Unterraum von V.

**Beweis**: $\left(\sum \alpha_i\,\vec{v}_i\right) + \left(\sum \beta_i\,\vec{v}_i\right) = \sum (\alpha_i + \beta_i)\,\vec{v}_i$

$\lambda\left(\sum \alpha_i\,\vec{v}_i\right) = \sum \underbrace{(\lambda\,\alpha_i)}_{\in \mathbb{R}}\,\vec{v}_i$

**Beispiel**: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$

$\text{Lin}\,(\vec{v}_{1,}\ \vec{v}_{2,}\ \vec{v}_3) = \{\alpha\,\vec{v}_1 + \beta\,\vec{v}_2 + \gamma\,\vec{v}_3 \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\} =$

$= \left\{ \begin{pmatrix} \alpha + \beta + \gamma \\ \alpha + 2\,\gamma \\ -\beta + 3\,\gamma \\ \beta \end{pmatrix} \middle| \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}$

**Definition**: Man sagt, ein Unterraum U von V wird von den Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$ **erzeugt** bzw. **aufgespannt** bzw. $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k)$ ist ein **Erzeugendensystem von U**, wenn $U = Lin\,(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k)$ ist.

**Beispiel 1**: Die Vektoren

$\vec{e}_1 = (1\ ,0\ ,0\ ,0)$ ,

$\vec{e}_2 = (0\ ,1\ ,0\ ,0)$ ,

$\vec{e}_3 = (0\ ,0\ ,1\ ,0)$ ,

$\vec{e}_4 = (0\ ,0\ ,0\ ,1)$

erzeugen $\mathbb{R}^4$ . Der selbe Vektorraum wird aber auch von $\vec{e}_1 + \vec{e}_2\ , \vec{e}_1 - \vec{e}_2\ , \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_{3,}\ \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_4$ aufgespannt. Allgemein: Die Vektoren $\vec{e}_i \quad (1 \le i \le n)$ der natürlichen Basis des $\mathbb{R}_n$ erzeugen $\mathbb{R}_n$ . Analog $\mathbb{R}^n$ .

**Beispiel 2**: Der Unterraum

$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \vee 3x + y + z = 0 \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$ wird erzeugt von den Vektoren

$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ da diese in der Ebene $3x + y + t = 0$ liegen.

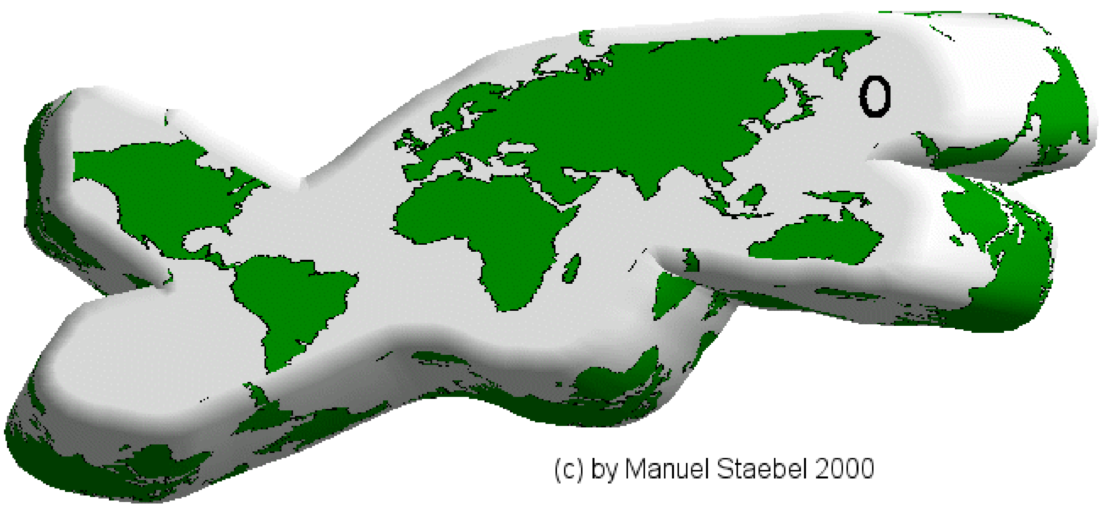
**Beispiel 3:** Der Vektorraum $\left\{ f \in C^0(\mathbb{R}) \middle| f''(x) + f(x) = 0 \quad \forall\ x \in \mathbb{R} \right\}$

wird erzeugt von den Funktionen $f_1(x) = \sin x$ und $f_2(x) = \cos x$ . Denn es gilt: jede differenzierbare Funktion f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ , welche die Gleichung f ' ' + f = 0 erfüllt, ist eine Linearkombination von sin x und cos x.

**Definition**:

a) Endlich viele Vektoren $\vec{v}_{1,} \cdots , \vec{v}_k$ des $\mathbb{R}$ -Vektorraums heißen <u>linear abhängig</u>, wenn $\exists\ \alpha_1 , \cdots , \alpha_k \in \mathbb{R}$ die nicht sämtlich Null sind, und erfüllen $\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \cdots + \alpha_k \vec{v}_k = 0$ .

b) Die Vektoren $\vec{v}_{1,} \cdots , \vec{v}_k$ heißen <u>linear unabhängig,</u> wenn sie nicht linear abhängig sind, d.h. $\alpha_1 \vec{v}_1 + \cdots + \alpha_k \vec{v}_k = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$ .



**Beispiel**:

$k=1,\quad \vec{v}\in V$ heißt linear unabhängig $\Leftrightarrow \quad (\alpha\vec{v}\Rightarrow\alpha=0) \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v}\neq 0$

$k=2,\quad \vec{u},\vec{v}$ linear unabhängig $\Leftrightarrow \quad \exists\alpha,\beta\in\mathbb{R},\alpha^2+\beta^2\neq 0\ ;\ \alpha\vec{u}+\beta\vec{v}=0 \quad \Leftrightarrow$

$\vec{u}=-\frac{\beta}{\alpha}\vec{v}\ \ (\alpha\neq 0)$

**Satz**: $\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_k\in V$ sind genau dann linear abhängig, wenn einer von ihnen als Linearkombination der anderen darstellbar ist.

**Beweis**: Sei $\alpha\vec{v}_1+\ldots+\alpha_k\vec{v}_k=0,\alpha_1\neq 0\Rightarrow\vec{v}_1=-\frac{1}{\alpha_1}(\alpha_2\vec{v}_2+\ldots+\alpha_k\vec{v}_k)$ . Umkehr offensichtlich.

**Satz (Eigenschaften)**:

a) Jedes endliche System von Vektoren, das linear abhängige Vektoren enthält, ist linear abhängig.

b) Jedes endliche System von Vektoren, das den Nullvektor enthält, ist linear abhängig.

c) Jedes Teilsystem eines Systems linear unabhängiger Vektoren ist linear unabhängig.

**Beispiel**: Die Vektoren $\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n$ der natürlichen Basis des $\mathbb{R}^n$ sind linear unabhängig, denn

$x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+\ldots+x_n\vec{e}_n=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\Rightarrow x_1=0,x_2=0,\ldots,x_n=0$ ; einzige Lösung $x_i=0\,\forall i$ .

**Satz 3.1**:

a) in einer Matrix in Zeilenstufenform sind die von Null verschiedenen Zeilenvektoren linear unabhängig:

$$\begin{pmatrix}\blacksquare & \star & \star & \star\\ & \blacksquare & \star & \star\\ & & \blacksquare & \star\\ 0 & & & \blacksquare\end{pmatrix}$$

b) In einer Matrix in (analoger) Spaltenstufenform (durch Transponieren) sind die von Null verschiedenen Spaltenvektoren linear unabhängig.

$$\begin{pmatrix}\blacksquare & & & 0\\ \star & \blacksquare & & \\ \star & \star & \blacksquare & \\ \star & \star & \star & \blacksquare\end{pmatrix}$$

**Beweis**:

a) Sind $\vec{z}_1=(0,0,\ldots,0,\alpha_{1i},\ldots,\alpha_{1n})$ , $\vec{z}_2=(0,0,\ldots,0,\alpha_{2j},\ldots,\alpha_{2n})$ , ..., $\vec{z}_r=(0,0,\ldots,0,\alpha_{rs},\ldots,\alpha_{rn})$ mit $\alpha_{1i}\neq 0,\alpha_{2j}\neq 0,\ldots,\alpha_{rs}\neq 0$ (Pivotelemente), dann folgt aus $x_1\vec{z}_1+x_2\vec{z}_2+\ldots+x_r\vec{z}_r=0$ komponentenweise: $x_1\alpha_{1i}=0\Rightarrow x_1=0,x_1\alpha_{2j}=0\Rightarrow x_2=0$ ...

b) folgt aus a) durch Transponieren

***Bemerkung**: In einer* $n\times n$ *-Matrix* $A=(\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_n)$ *sind die Spaltenvektoren* $\vec{a}_i\in\mathbb{R}^n$ *genau* *dann linear unabhängig, wenn* $A\vec{x}=x_1\vec{a}_1+\ldots+x_n\vec{a}_n=0$ *nur die Lösung* $\vec{x}=0$ *hat. Das ist genau dann der Fall, wenn A invertierbar ist. Also gilt:*

**Satz 3.2**: Für eine $n\times n$ -Matrix A sind folgende Aussagen äquivalent:
a) A ist invertierbar.
b) Die Spalten von A sind linear unabhängig.
c) Die Zeilen von A sind linear unabhängig.

**Satz 3.3**: V sei ein beliebiger $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Für die Vektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k, \vec{w}\in V$ gilt:
a) $Lin(\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_k,\vec{w})=Lin(\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_k)\Leftrightarrow\vec{w}\in Lin(\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_k)$
b) Die $\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_k$ sind linear unabhängig $\Leftrightarrow$ Zur Erzeugung von $Lin(\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_k)$ kann kein $\vec{v}_i$ weggelassen werden, d.h. $(\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_k)$ bilden ein **minimales Erzeugendensystem**.

**Beweis**:
a) $\Rightarrow$ : $\vec{w}\in Lin(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k, \vec{w}) = Lin(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k)$
$\Leftarrow$ : $\vec{w} = \alpha_1\vec{v}_1 + \ldots + \alpha_k\vec{v}_k \Rightarrow \lambda_1\vec{v}_1 + \ldots + \lambda_k\vec{v}_k + \mu\vec{w} =$
$$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\vec{v}_i + \mu\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\vec{v}_i = \sum_{i=1}^{k}(\lambda_i+\mu\alpha_i)\vec{v}_i \quad \forall\lambda_i, \mu\in\mathbb{R}$$

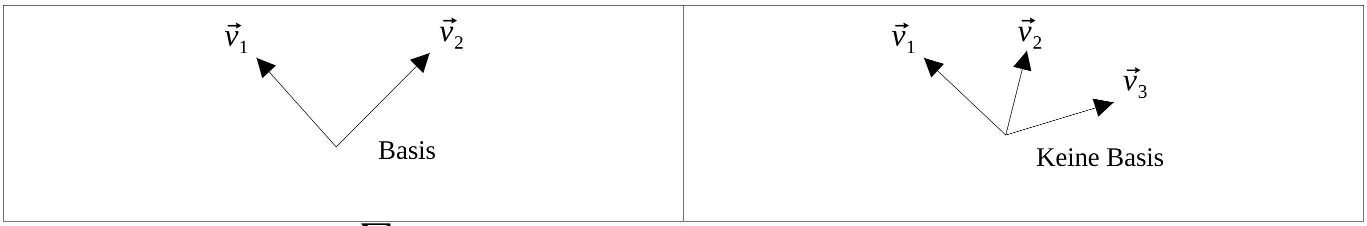
## 3.3 Basis und Dimensionen

**Definition**: Ein System (n-Tupel) $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$ von Vektoren aus V heißt eine **Basis** des $\mathbb{R}$ -Vektorraums V, wenn gilt:

(B1) $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ sind linear unabhängig

(B2) Die $\vec{v}_i$ erzeugen V, d.h. $V = Lin(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$

**Satz 3.4**: Ist $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$ eine Basis von V, dann gibt es $\forall\,\vec{a}\in V$ genau ein n-Tupel reelle Zahlen $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ $\vec{a} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{v}_n$ . Ferner sind je m Vektoren aus V linear abhängig, falls $m > n$ .




**Beweis**: Wegen (B2) $\vec{a} = \sum\alpha_i\vec{v}_i$ ist eindeutig, da
$$\vec{a} = \sum\alpha_i\vec{v}_i = \sum\beta_i v_i \Rightarrow \sum(\alpha_i-\beta_i)\vec{v}_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = \beta_i \quad \forall\, i \; .$$

**Beispiel 1**: $V = \mathbb{R}^2$ [Bild]

**Beispiel 2**: $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ des $\mathbb{R}^n$ ist eine Basis im Sinne der Definition.

**Satz 3.5**: Die Zeilen (bzw. Spalten) einer invertierbaren $n\times n$ -Matrix bilden die Basis des $\mathbb{R}_n$ (bzw. $\mathbb{R}^n$ ).

**Beweis**:

(B1) gilt wegen 3.2. Sei $A = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ invertierbar $(\vec{a}_i \in \mathbb{R}^n)$. Sei $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$. Mit

$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} := A^{-1}\vec{v}$ $\quad \vec{v} = A\,(A^{-1}\vec{v}) = \alpha_1\,\vec{a}_1 + \dots + \alpha_n\,\vec{a}_n \Rightarrow$ (B2)

**Beispiel**: Die Polynome $1, x+1, (x+1)^2, \dots, (x+1)^n$ bilden eine Basis des $\mathbb{R}$ -Vektorraums $P_n$ aller Polynome vom Grad $\le n$.

**Beweis**: Aus $\left[\alpha_0 \cdot 1 + \alpha_1\,(x+1) + \dots + \alpha_n\,(x+1)^n = 0 \quad \forall\, x\right] \Rightarrow \alpha_i = 0 \quad \forall\, i \Rightarrow$ (B1). Jedes $p \in P_n$ lässt sich schreiben in der Form $p\,(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i\,(x+1)^i$, denn durch Koeffizientenvergleich in die Form $\sum_{i=0}^{n} \beta_i\,x^i$ bringen.

**Definition**: Ein Vektorraum heißt **endlichdimensional** oder **endlich erzeugt**, wenn es endlich viele Vektoren $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_r \in V$ mit $V = Lin\,(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_r)$ gibt.

**Satz 3.6 (Basisergänzungssatz)**: In einem endlichdimensionalen Vektorraum $V \neq \{0\}$ bilden linear unabhängige Vekoren $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ bereits eine Basis oder man kann sie durch Hinzunahme weiterer Vektoren $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_l$ zu einer Basis von V ergänzen.

**Satz 3.7**: Basislänge = Dimension

Jeder endlich erzeugte Vektorraum $V \neq \{0\}$ besitzt eine Basis $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$. Ist $(\vec{\omega}_1 \dots \vec{\omega}_m)$ ebenfalls eine Basis von V dann gilt m = n. Die gemeinsame Länge n aller Basen von V heisst die Dimension von V, abkürzt Dim V. Man setzt Dim{0} = 0.

**Beweis**: 3.6, 3.4

**Beispiel**: $\mathrm{Dim}\ \mathbb{R}^n = n$ $\mathrm{Dim}\ \mathbb{R}_n$ $\quad \mathrm{Dim}\ P_n = n+1$

$\mathrm{Dim}\ \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f$ zweimal stetig differenzierbar und $f'' + f = 0\}$

$$\mathrm{Dim} \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \in \mathbb{R}^3, 3\,x + y + z = 0 \right\} = 2$$

**Folgerung**: Ist r die Maximalzahl linear unabhängiger Vektoren aus $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$, dann gilt $r = \mathrm{Dim}\ \mathrm{Lin}\ (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)$

**Beweis**: Nach evtl. Umnumerierung sei $\vec{v}_{1,} \dots, \vec{v}_r$ linear unabhängig und $\vec{v}_r, \dots, \vec{v}_{r,}\ \vec{v}_j$ für $r+1 \le j \le k$ linear abhängig. Aus Satz 3.3 folgt $\mathrm{Lin}\ (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k) = \mathrm{Lin}\ (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r)$ ist eine Basis der linearen Hülle und deshalb $r = \mathrm{Dim}\ \mathrm{Lin}\ (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)$

**Satz 3.8**: In einem $\mathbb{R}$ -Vektorraum der Dimension n gilt:

a) Je n linear abhängige Vektoren V bilden bereits eine Basis von V.
b) Jedes Erzeugendensystem von V mit n Elementen ist eine Basis von V.

c) Je n+1 Vektoren aus V sind linear abhängig.

**Beweis**: Zusammenfassung 3.4, 3.5, 3.7

**Beispiel**: Je 4 Vektoren des $\mathbb{R}^3$ , 7 Vektoren aus $\mathbb{R}^6$ , ... , sind linear abhängig.

**Satz 3.9**: Dimension der Unterräume. Jeder Unterraum U eines Vektorraums V mit $Dim\ V = n$ ist endlichdimensional, im Falle $U \neq V$ gilt: $Dim\ U < Dim\ V$

**Beweis**: Sei $U \neq \{0\}$ und $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r)$ ein System mit der größtmöglichen Anzahl linear unabhängiger Vektoren aus U. Nach Satz 3.8c gilt $r \leq n$ . Für beliebige $\vec{u} \in U$ sind die $r+1$ Vektoren $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r, \vec{u}$ linear abhängig, d.h. $U = \text{Lin}\,(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r)$ . Folglich ist $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r)$ eine Basis von U, $r = \text{Dim}\ U \leq n = \text{Dim}\ V$ .