Zusammenfassung

Mathematik für Physiker
Lineare Algebra

nach dem Buch „Höhere Mathematik 1“ von Kurt Meyberg / Peter Vachenauer, Springer Verlag

Angelehnt an die Vorlesung von
Prof. Harald Friedrich
TU München
2. Semester, SS 2000

Datum: 09.07.2000

von Christoph Moder

http://www.skriptweb.de

Hinweise (z.B. auf Fehler) bitte per eMail an mich: cm@skriptweb.de - Vielen Dank.

Inhaltsverzeichnis

1. Grundlagen.....2
2. Lineare Gleichungssysteme.....3
3. Das Gaußsche Lösungsverfahren.....3
4. Matrizenmultiplikation.....4
5. Transponierte Matrizen.....4
6. Invertierbare Matrizen.....4
7. Vektorräume.....5
8. Elementarmatrizen.....7
Berechnung der Inversen, Gauß-Jordan-Verfahren.....7
9. Determinanten.....8
Einschub: Permutationen.....8
10. Anwendungen der Determinante (aus der Vorlesung).....10
Das Kreuzprodukt (nur $\mathbb{R}$3!).....10
Das Skalarprodukt.....11
Zusammenhang Kreuz- und Skalarprodukt:.....11
Das Spatprodukt.....12
11. Lineare Abbildungen.....13
12. Längen, Winkel, Orthogonalität.....14
Spiegelung.....16
Drehung in der Ebene.....16
Drehungen im Raum.....17
Die orthogonale Gruppe.....17
Koordinatentransformation.....18
13. Eigenwerte und Eigenvektoren.....19
Berechnung der Eigenwerte einer Matrix:.....19
Anhang: Vokabular.....22

1. Grundlagen

Eine $m \times n$ -Matrix hat m Zeilen und n Spalten („zuerst Zeile, dann Spalte“).

$m \times 1$ -Matrizen heißen **Spaltenvektoren** oder **Spaltenmatrizen**.
$1 \times n$ -Matrizen heißen **Zeilenvektoren** oder **Zeilenmatrizen**.

Zwei Matrizen sind gleich, wenn sie
1. die gleiche Größe haben und
2. alle Komponenten gleich sind.

Die Menge aller Matrizen mit Komponenten aus $\mathbb{R}$ heißt $\mathbb{R}^{m \times n}$.
Die Menge aller Spaltenvektoren heißt $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{m \times 1}$.
Die Menge aller Zeilenvektoren heißt $\mathbb{R}_n = \mathbb{R}^{1 \times n}$.

Die Addition zweier Matrizen und die Multiplikation mit einem Skalar sind komponentenweise definiert.

Das System aus Spaltenvektoren, bei denen jeder Vektor aus einer 1 und n-1 Nullen besteht, heißt **natürliche Basis** des $\mathbb{R}^n$. Analog mit Zeilenvektoren: natürliche Basis des $\mathbb{R}_n$.

Eine Matrix, bei der alle Komponenten 0 sind, heißt **Nullmatrix**.

2. Lineare Gleichungssysteme

Das Gleichungssystem $A\,\vec{x}=\vec{b}$ heißt **homogen**, falls $\vec{b}=0$, ansonsten **inhomogen**.
Das homogene Gleichungssystem hat immer mindestens eine Lösung, die **triviale Lösung** mit $x_1=\ldots=x_n=0$.

Zwei lineare Gleichungssysteme heißen **äquivalent**, wenn sie die gleiche Lösungsmenge besitzen (d.h. der Vektor $\vec{b}$ ist gleich). **Äquivalenzumformungen** bzw. **elementare Zeilenumformungen**, bei denen das Gleichungssystem äquivalent bleibt, sind:

- Vertauschung zweier Zeilen
- Multiplikation einer Zeile mit einer Zahl $\alpha\neq 0$
- Addition des Vielfachen einer Zeile zu einer anderen

Damit die Umformungen übersichtlicher werden, kann man sie in die **erweiterte Koeffizientenmatrix** schreiben.

3. Das Gaußsche Lösungsverfahren

1. **Vorwärtselimination**: Man formt das LGS so um, dass die **Zeilenstufenform** entsteht (nach höchstens m - 1 Schritten), d.h. links von den **Pivotelementen** (die ungleich 0 sind) stehen nur 0en, und pro Zeile, die man nach unten geht, rückt das Pivotelement mindestens um 1 Stelle nach rechts.
2. **Rückwärtssubstitution**: Von unten nach oben werden die Lösungen eingesetzt.

Die Anzahl der von 0 verschiedenen Zeilen in der Zeilenstufenform nennt man **Rang** der Matrix; er gibt im homogenen LGS die Anzahl der abhängigen Variablen an.

Nach der Gauß-Elimination stehen an den Pivotstellen die **abhängigen Variablen**. Die anderen Variablen ändern an der Lösung nichts, man kann sie beliebig wählen und nennt sie **unabhängige Variablen** oder **freie Parameter**; um das zu kennzeichnen, ersetzt man sie durch $\lambda_1,\ldots,\lambda_t$.

Die Lösung des LGS, bei dem die freien Parameter als λ_i drin stehen, heißt **allgemeine Lösung**; sind irgendwelche konkreten Werte eingesetzt, nennt man sie **spezielle** bzw. **partikuläre Lösung**.

> Ein inhomogenes LGS ist genau dann lösbar, wenn der Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix gleich dem Rang der Matrix ist: $\text{Rang}\,(A|b)=\text{Rang}\;A$.

Die Lösbarkeit kann man schon nach der Vorwärtselimination feststellen: Ist eine Zeile auf der Koeffizientenseite 0, aber das zugehörige Absolutglied („rechts vom Strich“) ungleich 0, dann ist das inhomogene LGS nicht lösbar.

> Ein lösbares inhomogenes LGS lässt sich darstellen als die Summe der Lösung des zugehörigen homogenen LGS und einer partikulären Lösung.

4. Matrizenmultiplikation

Matrizen multipliziert man folgendermaßen: Das Element in der i-ten Zeile und j-ten Spalte des Matrizenprodukts ist die Summe der Produkte der Elemente aus der i-ten Zeile der linken Matrix und der j-ten Spalte der rechten Matrix (also jeweils erstes Element mal erstes Element plus zweites mal zweites Element usw. die ganze Zeile bzw. Spalte durch).

Die Matrizenmultiplikation ist nur definiert, wenn die Anzahl der Spalten der ersten Matrix gleich der Zeilenzahl der zweiten Matrix ist.

Es gelten folgende Rechenregeln:

- **Assoziativgesetz**: $A(BC)=(AB)C$;
- **Assoziativgesetz mit einem Skalar**: $\alpha(AB)=(\alpha A)B=A(\alpha B)$;
- **Distributivgesetz** nach beiden Seiten: $(A_1+A_2)B=A_1B+A_2B$ bzw. $B(A_1+A_2)=BA_1+BA_2$;
- Im Allgemeinen gilt das **Kommutativgesetz nicht**!

5. Transponierte Matrizen

Wenn man die i-te Zeile der Matrix A zur i-ten Spalte der Matrix B macht (für alle Zeilen), dann ist B die **Transponierte** von A: $B=A^T$. Dabei wird eine $m\times n$-Matrix zu einer $n\times m$-Matrix, und die Spalten der ursprünglichen Matrix werden zu den Zeilen der transponierten Matrix.

Es gelten folgende Rechenregeln:

- $(A+B)^T=A^T+B^T$;
- $(\alpha A)^T=\alpha A^T$;
- $(A^T)^T=A$;
- $(AB)^T=B^T A^T$;

> **Definition**: Eine $n\times n$-Matrix heißt:
> - **symmetrisch**, falls $A^T=A$,
> - **schiefsymmetrisch**, falls $A^T=-A$.
>
> Also sind $A+A^T$ und AA^T symmetrisch und $A-A^T$ schiefsymmetrisch.

Die Einheitsmatrix ist symmetrisch, und die Multiplikation mit ihr ist kommutativ, und sie ist invertierbar.

6. Invertierbare Matrizen

> **Definition**: Eine $n\times n$-Matrix ist **invertierbar**, wenn es eine **inverse Matrix** B gibt, die $AB=BA=E$ erfüllt.

Es gelten folgende Regeln:

- Die Inverse ist eindeutig.
- Die Inverse ist invertierbar.
- Das Produkt zweier invertierbarer Matrizen ist invertierbar: $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.
- Die Transponierte einer invertierbaren Matrize ist invertierbar: $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$.

> Gleichbedeutend sind:
> a) A ist invertierbar.
> b) Es gibt eine Inverse zu A: $AB=E$ und $BA=E$.

c) Rang A = n
d) $Ax=0 \Rightarrow x=0$
e) Die Spalten sind linear unabhängig.
f) Die Zeilen sind linear unabhängig.

Definition: Eine $n \times n$ -Matrix, bei der alle Elemente außer die auf der Diagonalen (α_{ii}) 0 sind, heißt **Diagonalmatrix**.
Stehen höchstens auf und rechts über der Diagonalen Elemente ungleich 0, dann ist es eine **obere Dreiecksmatrix**, stehen höchstens auf und links unter der Diagonalen Elemente ungleich 0, dann ist es eine **untere Dreiecksmatrix**.

Die Transponierte einer oberen Dreiecksmatrix ist eine untere Dreiecksmatrix und umgekehrt.

Eine Dreiecksmatrix ist genau dann invertierbar, wenn alle Diagonalelemente ungleich 0 sind.

Bei einer Diagonalmatrix (als Sonderfall einer Dreiecksmatrix) gilt: Die Inverse der Diagonalmatrix hat als Diagonalelemente die Kehrwerte der Diagonalelemente der Diagonalmatrix.

7. Vektorräume

Eine Menge V ist ein **Vektorraum**, wenn folgende Axiome erfüllt sind:

- Addition ist kommutativ und assoziativ.
- Es gibt ein neutrales Element für Addition (= Nullelement): $a+0=a$;
- Es gibt ein neutrales Element für Multiplikation (= Einselement): $1a=a$;
- Es gibt ein inverses Element für die Addition: $a+(-a)=0$;
- Multiplikation mit Skalaren ist assoziativ: $\lambda(\mu a)=(\lambda \mu)a$;
- Multiplikation mit Skalaren ist distributiv: $(\lambda+\mu)a=\lambda a+\mu a$; $\lambda(a+b)=\lambda a+\lambda b$;

Definition: Eine Teilmenge U eines Vektorraums V heißt **Unterraum** bzw. **linearer Teilraum**, wenn $u+v$ und λu (mit $u, v \in U$) selbst wieder im Unterraum sind.

Jeder Vektorraum hat die **trivialen Unterräume** $U=\{0\}$ und $U=V$.

Definition: Die Lösungsmenge eines homogenen Gleichungssystems ist der **Kern** der Matrix: Kern $A=\left\{x \in \mathbb{R}^n ; Ax=0\right\}$.

Der Kern ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$.

Definition: Die Menge aller Linearkombinationen von Vektoren heißt **lineare Hülle** dieser Vektoren.

Beispiel: $v_1=\{1, 1, 0, 0\}^T$, $v_2=\{1, 0, -1, 1\}^T$, $v_3=\{1, 2, 3, 0\}^T$;

$$\text{Lin}\,(v_1, v_2, v_3)=\{\alpha\, v_1+\beta\, v_2+\gamma\, v_3 ; \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}=\{\begin{pmatrix}\alpha+\beta+\gamma \\ \alpha+2\gamma \\ -\beta+3\gamma \\ \beta\end{pmatrix} ; \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\} ;$$

Sind $v_1, \ldots, v_k \in V$, dann ist ihre lineare Hülle ein Unterraum von V.

Definition: Ist $U = \mathrm{Lin}(v_1, \ldots, v_k)$, dann bilden $v_1, \ldots, v_k$ ein **Erzeugendensystem** von U.

Definition: Endlich viele Vektoren heißen **linear abhängig**, wenn man aus ihnen nicht-trivial den Nullvektor linear kombinieren kann (d.h. die Koeffizienten bei der Linearkombination sind nicht alle 0).

Es gilt:

- Jedes Teilsystem linear unabhängiger Vektoren ist linear unabhängig (wenn es das Gesamtsystem ist, dann ein Teilsystem erst recht).
- Jedes Gesamtsystem, das linear abhängige Vektoren enthält, ist linear abhängig.

Ein Vektor ist dann linear abhängig, wenn er sich aus den anderen Vektoren linear kombinieren lässt; der Nullvektor lässt sich immer linear kombinieren (alle Koeffizienten 0), daher ist jedes System, das den Nullvektor enthält, linear abhängig. Ein Vektorraum ist daher linear abhängig, wenn sich der Nullvektor nichttrivial kombinieren lässt (z.B. wenn der Nullvektor direkt enthalten ist).

In einer Matrix in Zeilenstufenform bzw. Spaltenstufenform sind die von 0 verschiedenen Zeilenvektoren bzw. Spaltenvektoren linear unabhängig.

Definition: Ein linear unabhängiges Erzeugendensystem von n Vektoren heißt **Basis**.

In einem linear unabhängigen Erzeugendensystem kann kein Vektor weggelassen werden (weil keiner durch andere linear kombiniert werden kann), daher ist es das minimale Erzeugendensystem.

Jedes Erzeugendensystem aus m Vektoren ($m > n$) ist daher linear abhängig.

Die bei allen Basen eines Vektorraums gleiche Anzahl an Vektoren heißt **Basislänge** bzw. **Dimension** des Vektorraums.

Definition: Eine Basis, bestehend aus den Einheitsvektoren, heißt **natürliche Basis**.

Definition: Ein Vektorraum ist **endlichdimensional** oder **endlich erzeugt**, falls es ein Erzeugendensystem gibt, das aus endlich vielen Vektoren besteht.

Basisergänzungssatz: In einem endlichdimensionalen Vektorraum bilden k linear unabhängige Vektoren bereits eine Basis oder lassen sich durch Hinzunahme weiterer Vektoren zu einer Basis ergänzen.

Satz: Jeder Unterraum eines endlichdimensionalen Vektorraums ist ebenfalls endlichdimensional: $(U \subseteq V) \neq V \Rightarrow \mathrm{Dim}\ U < \mathrm{Dim}\ V$

8. Elementarmatrizen

Definition: Die lineare Hülle $\mathrm{Lin}\,(z_1, \ldots, z_n)$ der Zeilen- oder Spaltenvektoren einer Matrix ist ein Vektorraum und heißt **Zeilenraum** bzw. **Spaltenraum**. Die Dimension dieses Vektorraums heißt **Zeilenrang** bzw. **Spaltenrang** der Matrix.

Satz: A und $A\,Q$ haben den selben Spaltenraum, A und $P\,A$ haben den selben Zeilenraum (P , Q sind invertierbar).

Definition: Eine Matrix, die durch eine elementare Zeilenumformung aus der Einheitsmatrix hervorgeht, heißt **Elementarmatrix**.

Es gibt 3 Typen von Elementarmatrizen (weil es 3 Typen von elementaren Zeilenumformungen gibt):

– Vertauschung zweier Zeilen (hier sind die entspr. Zeilen vertauscht)

– Multiplikation einer Zeile mit einem Skalar $\alpha \neq 0$ (hier steht in der entspr. Zeile α statt 1)

– Addition des Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile (eine 0 außerhalb der Diagonalen ist durch α ersetzt)

Satz: Elementarmatrizen sind invertierbar; die Inversen ebenfalls Elementarmatrizen. Durch Multiplikation mit Elementarmatrizen ($\tilde{E}$) kann man Matrizen umformen: $\tilde{A} = \tilde{E}\ A$, $\tilde{A} = A\ \tilde{E}^T$.

Satz: Der Spalten- bzw. Zeilenraum ändert sich nicht bei elementaren Spalten- bzw. Zeilenumformungen.

Satz: Der Rang einer Matrix ist die Dimension ihres Zeilenraumes bzw. die Dimension ihres Spaltenraumes. Die Dimension von Spalten- und Zeilenraum sind gleich.

Satz: $\text{Rang}\ A + \text{Dim}\,(\text{Kern}\ A) = n$.

Satz: Es gibt zu jeder Matrix A invertierbare Matrizen P , Q , so dass gilt: $P\ A\,Q = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (dabei ist $r = \text{Rang}\ A$ und E_r die Einheitsmatrix der Größe r).

Matrizen kann man sich zerlegen in zwei oder mehrere Blöcke neben- und/oder übereinander. Es entsteht eine sogenannte **Blockmatrix**:

$$A =: \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} Q = \begin{pmatrix} C\ Q \\ D\ Q \end{pmatrix} ;$$

$$B =: (E\ , F\ ) ;\ P\ (E\ , F\ ) = (P\ E\ , P\ F\ ) ;$$

Satz: Jede invertierbare Matrix ist ein Produkt von Elementarmatrizen.

Berechnung der Inversen, Gauß-Jordan-Verfahren

Wenn man eine invertierbare Matrix A mit Hilfe des Gaußschen Lösungsverfahrens zu einer Einheitsmatrix E umformt, und dabei jeden Umformungsschritt gleichzeitig zusätzlich auf eine Einheitsmatrix anwendet, dann ist am Schluss, wenn die ursprüngliche Matrix zur Einheitsmatrix geworden ist, aus der Einheitsmatrix die Inverse A^{-1} der ersten Matrix geworden.

Wenn man bei der Umformung von A bis zur oberen Dreiecksmatrix M ohne Zeilenvertauschungen arbeitet, stellt man fest, dass sich die Einheitsmatrix E nur unterhalb der Diagonalen verändert hat (die entstandene Matrix heißt P). Es gilt: $P\ A = M$ bzw. $A = P^{-1}\ M$. Man kann also A zerlegen in eine untere Dreiecksmatrix $L = P^{-1}$ (mit lauter Einsen auf der Diagonale) und eine obere Dreiecksmatrix $R = M$ (mit Diagonalelementen ungleich 0).
Diese **LR-Zerlegung** oder **Dreieckszerlegung** ist vorteilhaft für die Lösung der Gleichung $A\ X = B$ (vor allem, wenn sie für verschiedene rechte Seiten berechnet werden soll): Man

berechnet zuerst eine Matrix Y mit der Formel $L\ Y = B$, und daraus anschließend X mit $R\ X = Y$ (weil $L\,(R\ X) = (L\ R)\ X = A\ X = B$). Die Dreiecksform von L und R vereinfacht die Sache.

9. Determinanten

Definition: $\det(\alpha) = \alpha$, $\det\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2\end{pmatrix} = \alpha_1\,\beta_2 - \alpha_2\,\beta_1$;

Determinanten größerer Matrizen sind rekursiv definiert: Man entwickelt sie nach einer Spalte oder Zeile, d.h. für jedes der n Elemente der Spalte/Zeile multipliziert man das Element mit der Determinante der $(n-1)\times(n-1)$ -Matrix, die aus den Elementen, die nicht in der Zeile und Spalte des Elements sind (hier nach der k-ten Spalte):

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1}\, a_{ik} \cdot \det A_{ik}$$

(A_{ik} bedeutet: die Matrix ohne die i-te Zeile und k-te Spalte).

Dazu ist es natürlich sinnvoll, nach einer Spalte oder Zeile zu entwickeln, die viele Nullen enthält, bzw. die Matrix so umzuformen, dass viele 0en in einer Zeile/Spalte vorhanden sind.

Andere Schreibweise: $\det A = \sum_{P} (-1)^{P} \prod_{i=1}^{n} a_{i\,P(i)}$.

Mit P ist die Anzahl der Permutationen der Spaltenindices gemeint.

Einschub: Permutationen

3×3 -Matrix: $3! = 6$ Permutationen, Determinante ist Summe von 1 bis 6 des Produkts der Spaltenelemente von 1 bis 3

Vorstellung: Matrix als Schachbrett (hier: 3×3 -Schachbrett); immer 3 Türme auf das Schachbrett stellen, dass keiner den anderen schlagen kann entspricht jedem Determinanten-Summanden

$3!$ Möglichkeiten, 3 Zeilenindices auf 3 Zeilen zu verteilen

Satz: Eine Permutation ist eine umkehrbar eindeutige Abbildung einer Menge auf sich.
Hintereinanderausführung zweier Permutationen ergibt wieder eine Permutation.
Jede Permutation kann man zerlegen in eine Anzahl von Folgen, bei denen nur jeweils 2 Elemente vertauscht sind (und sogar bei denen nur jeweils 2 benachbarte Elemente vertauscht sind).

Beispiel:
1, 2, 3, 4, 5
2, 1, 3, 4, 5
2, 1, 4, 3, 5
2, 1, 4, 5, 3 usw.

Die Reihenfolge der einzelnen Vertauschungen ist also egal und nicht eindeutig, obwohl es die Gesamtpermutation schon ist. Aber ob man eine gerade oder ungerade Anzahl an Vertauschungen braucht, ist eindeutig. Man sagt also: Der Grad der Permutation ist gerade/ungerade, wenn die Anzahl der nötigen Vertauschungen eine gerade/ungerade Zahl ist.

Definition: $(-1)^P = \begin{cases} +1 & \text{für gerade Permutationen} \\ -1 & \text{für ungerade Permutationen} \end{cases}$

Bei der Determinante: ist es eine gerade Permutation, dann muss ein Plus vor den Summanden, ansonsten ein Minus (Spaltennummer!). Beispiel: $a_{11}\, a_{23}\, a_{32}$ hat als Spaltennummern 1-3-2, dafür braucht man eine Vertauschung, um dies aus 1-2-3 zu erzeugen; eins ist ungerade, also ein Minus.

(Ende des Einschubs)

Rechenregeln:

- Ist eine Matrix linear abhängig (eine Zeile/Spalte 0, zwei Z./Sp. gleich): $\Leftrightarrow$ $\det = 0$.
- Äquivalent: Ist eine Matrix invertiertbar, dann ist sie linear unabhängig: $\Leftrightarrow$ $\det \neq 0$
- **gemeinsamer Faktor einer Zeile** $\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha\, a_{i1} & \alpha\, a_{i2} & \cdots & \alpha\, a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \alpha \cdot \det A$.
- **Summenzerlegung**: $\det \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ a+b \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ a \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ b \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$.
- Die Determinante ist **alternierend**: Bei Vertauschung zweier Zeilen: $\det \tilde{A} = -\det A$.

Grund: Aus der Definition der Determinante sieht man, dass sich bei Vertauschung zweier benachbarter Zeilen das Vorzeichen ändert (da es immer abwechselnd positiv und negativ ist). Jede Zeilenvertauschung lässt sich auf eine ungerade Anzahl von Vertauschungen benachbarter Zeilen zurückführen.
Statt alternierend nennt man dieses Verhalten auch Antisymmetrie.

Rechenregeln:

– Bei der Addition/Subtraktion eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen ändert sich die Determinante nicht.

– $\det A^T = \det A$ (dadurch gilt alles, was für Zeilen gesagt wird, auch für Spalten u.u.)

– Für eine obere/untere Dreiecksmatrix gilt: die Determinante ist das Produkt der Diagonalelemente (anschaulich: alles andere fällt weg, weil auf einer Seite immer 0 dabei ist). Spezialfall: Einheitsmatrix: $\det E = 1$, $\det(\alpha\, E) = \alpha^n$ aus diesem Grund.

– **Multiplikationssatz**: $\det(A\, B) = (\det A)(\det B)$.

Folgerungen aus dem Multiplikationssatz:

- $\det(AB) = \det(BA)$

- $\det(A^k) = (\det A)^k$
- $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$, falls invertierbar
- $\det(C^{-1} A C) = \det A$
- **Kästchensatz**: $\det\begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix} = \det B \cdot \det D$.

Die Vandermonde-Determinante:
Diese Determinante hat die Form:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{pmatrix} \text{ (Dimension beliebig!)}$$

Man kann sie folgendermaßen umformen:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & y-x & y^2-x^2 \\ 0 & z-x & z^2-x^2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} y-x & y^2-x^2 \\ z-x & z^2-x^2 \end{pmatrix} = (y-x)(z-x)\det\begin{pmatrix} 1 & x+y \\ 1 & z+x \end{pmatrix} =$$

$$= (y-x)(z-x)\left[\det\begin{pmatrix} 1 & y \\ 1 & z \end{pmatrix} + \underbrace{\det\begin{pmatrix} 1 & x \\ 1 & x \end{pmatrix}}_{=0}\right] = (y-x)(z-x)(z-y);$$

Allgemein: $\det(\text{Vandermonde}) = \prod\limits_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$; rechts stehen also alle Differenzen $(x_j - x_i)$ mit $i < j$.

Cramersche Regel: A ist invertierbare $n \times n$-Matrix; $A\vec{x} = \vec{b}$ ist also lösbar.
Um $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$ zu errechnen ($A = (\vec{s}_1, \vec{s}_2, \ldots, \vec{s}_n)$):
i-te Komponente von $\vec{x}$: $x_i = \dfrac{\det(\vec{s}_1, \ldots, \vec{s}_{i-1}, \vec{b}, \vec{s}_{i+1}, \ldots, \vec{s}_n)}{\det A}$;

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(b_{ij}), \quad b_{ij} = (-1)^{j-i} \det A_{ji}.$$

10. Anwendungen der Determinante (aus der Vorlesung)

Das Kreuzprodukt (nur $\mathbb{R}^3$!)

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} = -(\vec{b} \times \vec{a}) =$$

$$= \vec{e}_x (a_y b_z - a_z b_y) - \vec{e}_y (a_x b_z - a_z b_x) + \vec{e}_z (a_x b_y - a_y b_x) = \det\begin{pmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{pmatrix};$$

***Bemerkung**: Die Darstellung als Determinante muss nicht genau so aussehen; z.B. kann die Matrix transponiert sein (das ändert an der Determinante nichts).*

Merkregel: immer x-y-z durchzählen; in der x-Spalte kommen die Komponenten y und z, in der y Spalte die Komponenten z und x usw.

Rechenregeln:

$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \vartheta$;

$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$; $\Rightarrow$ $\vec{a} \times \vec{a} = 0$;

$\alpha (\vec{a} \times \vec{b}) = (\alpha \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\alpha \vec{b})$;

$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$; $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$; (distributiv)

$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$;

Das Kreuzprodukt ist nicht assoziativ!

Die Richtung ist senkrecht zu der aus den beiden Vektoren gebildeten Ebene.

Ein Vergleich mit der Geometrie ergibt:

Der Flächeninhalt eines von zwei Vektoren aufgespannten Parallelogramms ist der Betrag des Kreuzprodukts: $A = |\vec{a} \times \vec{b}|$.

Schraubenregel: Wenn man eine Schraube vom ersten Vektor auf dem kürzesten Weg auf den zweiten Vektor dreht, dann zeigt das Kreuzprodukt in die Richtung, in die sich die Schraube dreht („rein“ oder „raus“).

Oder:

Rechte-Hand-Regel: Der Zeigefinger zeigt in Richtung des ersten Vektors, der Mittelfinger in die Richtung des zweiten Vektors; dann zeigt der Daumen in Richtung des Kreuzprodukts.

$\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z$, $\vec{e}_y \times \vec{e}_z = \vec{e}_x$, $\vec{e}_z \times \vec{e}_x = \vec{e}_y$; (ebenfalls zyklisch x-y-z durchlaufen!)

Das Skalarprodukt

Definition: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \vartheta$ nennt man **Skalarprodukt**.

$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$;

Was ist ein Skalar? Eine Größe, die sich nicht ändert, wenn das Koordinatensystem sich ändert (ein Vektor ändert sich dabei sehr wohl).

Für einen Mathematiker ist ein Vektor etwas, was die Vektor-Axiome erfüllt; für einen Physiker ist eher wichtig, wie er sich verhält in verschiedenen Koordinatensystemen.

Zusammenhang Kreuz- und Skalarprodukt:

$(\vec{a} \times \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \cdot (1 - \cos^2 \vartheta) = |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \cdot \sin^2 \vartheta$;

$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{b})\, \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\, \vec{c}$ (Grassmann);

$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\, (\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{b} \cdot \vec{c})\, (\vec{a} \cdot \vec{d})$ (Lagrange);

Das Spatprodukt

Definition: Die Kombination $[\vec{a}\,,\,\vec{b}\,,\,\vec{c}]=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ aus Skalar- und Kreuzprodukt nennt man **Spatprodukt**.

Das Parallelepiped bzw. Parallelflach bzw. Spat, das von drei Vektoren aufgespannt wird, hat das Volumen:
$V=\left|[\vec{a}\,,\,\vec{b}\,,\,\vec{c}]\right|=\left|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})\right|$;

Begründung: Die Grundfläche (das Parallelogramm aus $\vec{b}$ und $\vec{c}$) hat als Fläche $\left|\vec{b}\times\vec{c}\right|$, die Höhe beträgt $\left|\vec{a}_{\vec{b}\times\vec{c}}\right|$ (also die Komponente von $\vec{a}$, die in Richtung des Kreuzprodukts der anderen beiden zeigt).

Drei Vektoren sind linear unabhängig, wenn ihr Spatprodukt ungleich 0 ist.

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=a_x\,(b_y\,c_z-b_z\,c_y)-a_y\,(b_x\,c_z-b_z\,c_x)+a_z\,(b_x\,c_y-b_y\,c_x)=\det\begin{pmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{pmatrix}.$$

Das Volumen eines Spats, aufgespannt durch die Vektoren $\vec{v}_1\ldots\vec{v}_n$ ist $V=\left|\det\begin{pmatrix}\vec{v}_1\\ \vec{v}_2\\ \vdots\\ \vec{v}_n\end{pmatrix}\right|$
.

***Bemerkung**: Ein 3-Spat ist ein Parallelepiped, der Betrag der Determinante sein Volumen. Im Zweidimensionalen ist es ein Parallelogramm, und der Betrag der Determinante ist die Fläche. In höherdimensionalen Räumen ist es nicht mehr anschaulich.*

Die Fläche eines Dreiecks ist $\frac{1}{2}\,\text{Grundlinie}\cdot\text{Höhe}$, das Volumen eines pyramidenartigen Körpers $\frac{1}{3}\,\text{Grundfläche}\cdot\text{Höhe}$;

Entsprechendes gilt für höherdimensionale Räume: wenn man z.B. im siebendimensionalen Raum bei einem sechsdimensionales Objekt einen Punkt außerhalb mit allen „Ecken“ verbindet, entsteht eine siebendimensionale Verallgemeinerung einer Pyramide, dort gilt entsprechend für das „Volumen“:
$\frac{1}{7}\,\text{Grundfläche}\cdot\text{Höhe}$
(„Grundfläche“ nicht als Fläche, sondern als etwas Sechsdimensionales zu verstehen).

Volumen eines Tetraeders: Grundfläche ist ein halbes Parallelogramm
$V=\frac{1}{3}\,\frac{1}{2}\,V\,(\text{Spat})=\frac{1}{6}\,V\,(\text{Spat})$.

11. Lineare Abbildungen

Satz: Bei jeder Abbildung gilt:

- ein Element der Definitionsmenge wird auf genau ein Element der Bildmenge abgebildet
- jedes Element der Definitionsmenge wird abgebildet
- es können durchaus mehrere Elemente auf das selbe Bildelement abgebildet werden

D.h. die Bildmenge ist höchstens so groß wie die Definitionsmenge bzw. der Bildraum hat höchstens so viele Dimensionen wie der Urbildraum.

Definition: Der **Graph** einer (allg.) Abbildung ist $\{(a, f(a)) ; a \in A, f(a) \in B\}$.

Satz: Zwei Abbildungen sind gleich, wenn gilt $f(a) = g(a) \quad \forall a$

Definition: Eine Abbildung $f : V \to W$, die jedem Vektor des Urbildraumes einen Vektor im Bildraum zuordnet, heißt **linear**, falls sie folgende Axiome erfüllt:
- $f(\alpha \vec{v}) = \alpha \cdot f(\vec{v}) \quad \forall \vec{v} \in V, \alpha \in \mathbb{R}$, speziell: $f(\vec{0}) = \vec{0}$;
- $f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v}) \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in V$;

Eine lineare Abbildung heißt auch **lineare Transformation**, **linearer Operator** oder **Vektorraumhomomorphismus**.

Beispiele für lineare Abbildungen:

– Nullabbildung (bildet alles auf den Nullvektor ab)

– identische Abbildung (bildet jeden Vektor auf sich selbst ab)

– Projektion (z.B. Vektor im $\mathbb{R}^3$ wird auf eine Ebene projiziert)

– Differenziationsoperator $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$

– Integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

– Komposition zweier linearer Abbildungen $(f \circ g)(\vec{u}) = f(g(\vec{u}))$

– **Nichtlineare Abbildung**: z.B. die Parallelverschiebung $f(\vec{v}) = \vec{v} + \vec{u}$

Definition: Die Menge aller linearer Abbildungen von V nach W bildet einen $\mathbb{R}$-Vektorraum, den **Raum der Homomorphismen** $\mathrm{Hom}(V, W) = \{f ; f : V \to W \text{ linear}\}$.

Definition: Eine lineare Abbildung $f(x)$ mit $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (endlichdimensional) lässt sich immer auch darstellen durch ihre **Abbildungsmatrix**: $f(x) = F\,x$.

Mit einer festen $m \times n$-Matrix A ist die Abbildung $x \to A\,x$ linear.

Definition: Jeder Vektor $\vec{v}$ eines Vektorraums kann als Linearkombination einer Basis des Vektorraums geschrieben werden.
Die lineare Abbildung, die jedem Vektor die Linearkombination aus den Basisvektoren der Basis B zuordnet, heißt **Koordinatenabbildung** bezüglich B.
Der Vektor, bestehend aus den Koordinaten (= Koeffizienten der

Linearkombination), heißt **Koordinatenvektor** von $\vec{v}$ bezüglich B.

Definition: Eine Abbildung $f(x) = x + (b \cdot x)\, a$ bezeichnet man als **Scherung** in Richtung a; b steht senkrecht auf a.
Die zugehörige Abbildungsmatrix lautet: $E + a\, b^T$.

Satz: Sind zu den linearen Abbildungen f und g die zugehörigen Abbildungsmatrizen F und G, so gilt: $f(g(x)) = F\, G\, x$.

Beweis: Nachrechnen; ersetzen von g und f durch G und F.

Definition: Eine lineare Abbildung heißt **invertierbar**, falls sie bijektiv ist (es gibt zu jedem Bildvektor einen Urbildvektor). Genau dann ist die Abbildungsmatrix invertierbar.

Wie oben beschrieben ist das Volumen eines n-Spats: $V = \left|\det(\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n)\right|$. Eine lineare Abbildung, die, auf alle $\vec{b}_i$ angewandt, das Volumen des Spats nicht verändert, heißt **volumentreu**. In diesem Fall gilt:
$V = \left|\det(f(\vec{b}_1), \ldots, f(\vec{b}_n))\right| = \left|\det(F\, \vec{b}_1, \ldots, F\, \vec{b}_n)\right| = \left|\det F \det(\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n)\right| = \left|\det F\right| V$,
also ist $\left|\det F\right| = 1$.

12. Längen, Winkel, Orthogonalität

Definition: Eine Verknüpfung von zwei Vektoren heißt **Skalarprodukt**, wenn sie folgende Bedingungen erfüllt:
- Kommutativität: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- Linearität: $\vec{a} \cdot (\vec{b}_1 + \alpha\, \vec{b}_2) = \vec{a}\, \vec{b}_1 + \alpha\, \vec{a}\, \vec{b}_2$
- Positivität: $\vec{a} \cdot \vec{a} > 0 \quad \forall\, \vec{a} \neq 0$

Definition: $x \cdot y := x^T\, y = \sum_{i=0}^{n} x_i\, y_i$ heißt (Standard-)**Skalarprodukt** der Vektoren x und y.

Definition: Der **Betrag** eines Vektors ist

$$|x| = \sqrt{x \times x} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Er wird auch **Länge** des Vektors genannt.

Definition: Ein Vektor der Länge 1 ist **normiert** und heißt Einheitsvektor. Einen Vektor normiert man folgendermaßen:

$$\frac{x}{|x|}.$$

Rechenregeln:
- Das Skalarprodukt ist **kommutativ**: $x \cdot y = y \cdot x$.
- Das Skalarprodukt ist **assoziativ**: $\alpha\,(x \cdot y) = (\alpha\, x) \cdot y = x \cdot (\alpha\, y)$.
- Das Skalarprodukt ist **distributiv**: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.
- Das Skalarprodukt ist **positiv definiert**: $x^2 > 0$ für alle $x \neq 0$
- $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

- $|\alpha\ x| = |\alpha|\ |x|$;
- **Cauchy-Schwarzsche Ungleichung (CSU)**: $|x \cdot y| \leq |x|\ |y|$;
- **Dreiecksungleichung (DU)**: $|x + y| \leq |x| + |y|$;

Beweis:

Dreiecksungleichung:

$$|x + y|^2 = (x + y) \cdot (x + y) = |x|^2 + 2\ x \cdot y + |y|^2 \leq |x|^2 + 2\ |x|\ |y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2 ;$$

Definition: Der **Winkel** zwischen zwei Vektoren ist folgendermaßen definiert:

$$\cos \sphericalangle (\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|\ |\vec{b}|} .$$

Begründung: Wenn man den Cosinus des Winkels in die CSU einsetzt, sieht man, dass der Cosinus immer zwischen -1 und +1 ist (daher passt die Bezeichnung „Cosinus“); aus der Existenz des Cosinus folgt, dass der zugehörige Winkel eindeutig ist (im Bereich $0 \leq \varphi \leq \pi$).

***Bemerkung**: Durch Nachrechnen ergibt sich, dass der Nullvektor orthogonal zu jedem Vektor ist.*

Definition: Zwei Vektoren sind **orthogonal**, wenn gilt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ (d.h. der Winkel ist 90°).

Definition: Eine Matrix heißt **orthogonal**, wenn gilt: $A^T\ A = E$ bzw. $A^T = A^{-1}$.

***Bemerkung**: Bei orthogonalen Matrizen ist die Inverse also ganz einfach zu berechnen.*
Aus der Orthogonalität folgt: $\det\ A = \pm 1$, *weil* $1 = \det\ E = 1 = \det\ A^T\ \det\ A = (\det\ A)^2$.

Satz: Äquivalent sind:
- A ist orthogonal.
- $(A\ \vec{x}) \cdot (A\ \vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{y}$.
- Die Spalten von A bilden eine orthonormale Basis des $\mathbb{R}^n$.
- Wenn A eine Abbildungsmatrix ist, ist genau dann die zugehörige lineare Abbildung orthogonal.

Beweis: $(A\ x) \cdot (A\ y) = (A\ x)^T\ (A\ y) = x^T\ A^T\ A\ A\ y = x^T\ y = x \cdot y$;

Definition: Eine lineare Abbildung heißt **orthogonal**, wenn für alle Vektoren gilt:

$$f\ (\vec{a}) \cdot f\ (\vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} .$$

Eine lineare Abbildung ist

- volumentreu, weil man sie durch eine Abbildungsmatrix ausdrücken kann, die ebenfalls orthogonal ist und daher die Determinante ± 1 hat.
- längen- und winkeltreu, weil für die Berechnung von Länge und Winkel das Skalarprodukt verwendet wird, und das ändert sich nicht.

Definition: Eine Basis heißt **orthogonal**, wenn alle ihre Vektoren paarweise orthogonal sind.
Eine Basis heißt **orthonormal**, wenn außerdem alle Basisvektoren normiert sind.

Schmidtsches Orthonormalisierungsverfahren: Aus einem normierten Vektor und einem weiteren Vektor wird die zum normierten Vektor senkrechte Komponente berechnet (indem man die zum normierten Vektor parallele Komponente des zweiten Vektors abzieht), diese ebenfalls normiert, aus diesen beiden normierten Vektoren und dem nächsten Vektor wird die zu den beiden ersten Vektoren senkrechte Komponente berechnet, ebenfalls normiert usw., für alle Vektoren der Basis; man erhält eine Orthonormalbasis.
Vektoren der alten Basis: $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, … ; Vektoren der neuen Basis: $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$, … ;

$$\vec{b}_1 = \frac{\vec{a}_1}{|\vec{a}_1|} ,$$

$$\vec{b'}_2 = \vec{a}_2 - \left(\vec{a}_2 \cdot \vec{b}_1\right) \vec{b}_1 \; ; \; \vec{b}_2 = \frac{\vec{b'}_2}{|\vec{b'}_2|} ,$$

$$\vec{b'}_3 = \vec{a}_3 - \left(\vec{a}_3 \cdot \vec{b}_2\right) \vec{b}_2 - \left(\vec{a}_3 \cdot \vec{b}_1\right) \vec{b}_1 \; ; \; \vec{b}_3 = \frac{\vec{b'}_3}{|\vec{b'}_3|} ;$$

$$\vec{b'}_k = \vec{a}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \left(\vec{a}_k \cdot \vec{b}_i\right) \vec{b}_i \; ; \; \vec{b}_k = \frac{\vec{b'}_k}{|\vec{b'}_k|} ;$$

Spiegelung

Die Ausrichtung einer Ebene kann man beschreiben durch ihren Normalenvektor.

Um einen Punkt $\vec{x}$ an einer Ebene, deren Normaleneinheitsvektor $\vec{a}$ ist, zu spiegeln, geht man schrittweise so vor:

– Der Bildpunkt $\vec{x'}$ hat den selben Abstand von der Ebene wie $\vec{x}$, also den doppelten Abstand zwischen Ebene und $\vec{x}$ von $\vec{x}$. Es gilt also: $\vec{x'} = \vec{x} - 2\, d\left(\vec{x}, \text{Ebene}\right)$.

– Die Richtung, in die gespiegelt wird, ist auch klar: in Gegenrichtung des Normalenvektors, also $-\vec{a}$.

– Die Entfernung von $\vec{x}$ von der Ebene lässt sich folgendermaßen berechnen: Man stellt $\vec{x}$ und $\vec{a}$ so, dass sie vom selben Punkt auf der Ebene ausgehen; dann kann man die Komponente von $\vec{x}$ senkrecht zur Ebene mit dem Cosinus berechnen:
$\vec{x}_{\|} = \cos\varphi \cdot |\vec{x}| = \frac{\vec{a} \cdot \vec{x}}{|\vec{a}|\,|\vec{x}|}\,|\vec{x}| = \vec{a} \cdot \vec{x}$, da $\vec{a}$ Einheitsvektor: $|\vec{a}| = 1$.

Für die **Spiegelung** gilt also:

$$s\left(\vec{x}\right) = \vec{x} - 2\left(\vec{x} \cdot \vec{a}\right) \vec{a} .$$

Drehung in der Ebene

Die Drehmatrix für Drehungen in der Ebene lautet:

$$D = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Satz: D ist Drehmatrix $\Leftrightarrow$ $D^T D = E$ (ist also orthogonal) und $\det D = 1$.

Drehungen im Raum

Drehungen im Raum erfolgen immer um eine Drehachse $\vec{a}$. Jede Drehung im Raum kann man zerlegen in eine Hintereinanderausführung von drei Drehungen um die drei Koordinatenachsen im Raum (die dann drei Drehungen in der Ebene sind). Diese drei Einzel-Drehwinkel heißen **Cardan-Winkel** der Drehung. Die Abbildung lautet:

$$d(\vec{x}) = (\cos\varphi)\,\vec{x} + (1-\cos\varphi)\,\frac{\vec{x}\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|^2}\,\vec{a} + \frac{\sin\varphi}{|\vec{a}|}\,\vec{a}\times\vec{x}.$$

Beweis: Man zerlegt $\vec{x}$ in eine Komponente parallel zur Drehachse:

$$\vec{x_\parallel} = \frac{\vec{x}\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|}\cdot\frac{\vec{a}}{|a|} = \frac{\vec{x}\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|^2}\,\vec{a}$$

(die ändert sich bei der Drehung nicht) und eine senkrecht zur Drehachse:

$\vec{x_\perp} = \vec{x} - \vec{x_\parallel}$.

Für die Drehung der senkrechten Komponente in der Ebene senkrecht zur Drehachse gilt: $d(\vec{x_\perp}) = (\cos\varphi)\,\vec{x_\perp} + (\sin\varphi)\,\vec{y_\perp}$. Das $\vec{y_\perp}$ ist die Achse in der Drehebene senkrecht zu $\vec{x_\perp}$, und da die Drehebene senkrecht zur Drehachse steht, gilt also: $\vec{y_\perp} = (\vec{x_\perp}\times\vec{a})/|\vec{a}|$.

Durch Umformung obiger Formel für Drehungen im Raum (bzw. der zugehörigen – recht komplizierten – Drehmatrix D) ergibt sich für den Drehwinkel und die Drehachse:

$\cos\varphi = \frac{1}{2}(\mathrm{Spur}\ D - 1)$;

$(D-E)\,\vec{a} = 0$;

$$\vec{a} = \frac{1}{2\sin\varphi}\begin{pmatrix} d_{32}-d_{23} \\ d_{13}-d_{31} \\ d_{21}-d_{12} \end{pmatrix} \quad \text{(für } \varphi \neq \pi\text{)}.$$

Die orthogonale Gruppe

Definition: Die Menge aller orthogonalen $n\times n$-Matrizen heißt **orthogonale Gruppe** des $\mathbb{R}^n$:

$$O(n) := \{A\in\mathbb{R}^{n\times n}\ ;\ A^T A = E\}$$

Definition: Die Teilmenge einer orthogonalen Gruppe

$$SO(n) := \{A\in\mathbb{R}^{n\times n}\ ;\ (A^T A = E)\wedge(\det A = 1)\}$$

heißt **spezielle orthogonale Gruppe** oder **Drehgruppe**.

***Bemerkung**: Da bei orthogonalen Matrizen die inverse gleich der transponierten Matrix ist, gilt:*

$A\in O(n) \Rightarrow A^{-1}\in O(n)$.

Aus $(A\,B)^T = B^T A^T = B^{-1} A^{-1} = (A\,B)^{-1}$ *folgt:*

$A\in O(n)\wedge B\in O(n) \Rightarrow (A\,B)\in O(n)$.

Beides gilt natürlich auch für Drehgruppen: Die Hintereinanderausführung zweier Drehungen gibt also wieder eine Drehung.

Satz: $O(2)$ besteht aus allen Matrizen der Form:

$$A=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix} \text{ falls } \det A=1\,,$$

$$A=\begin{pmatrix}-\cos\varphi & \sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix} \text{ falls } \det A=-1\,.$$

Beweis: $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$; $A^{-1}=\begin{pmatrix}a_{22} & -a_{12}\\ -a_{21} & a_{11}\end{pmatrix}$; $A^T=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{21}\\ a_{12} & a_{22}\end{pmatrix}$;

Daraus folgt: $a_{11}=a_{22}$, $a_{12}=-a_{21}$:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & -a_{21}\\ a_{21} & a_{11}\end{pmatrix};$$

Für $\det A=+1$ gilt: $a_{11}^2+a_{21}^2=1$; also kann man schreiben: $a_{11}=\cos\varphi$, $a_{21}=\sin\varphi$:

$$A=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}.$$

Damit $\det A=-1$ ist, muss man A nur folgendermaßen umformen:

$$\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\cos\varphi & -\sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}=A';$$

$$\det A'=-\cos^2\varphi-\sin^2\varphi=-(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)=-1$$

Satz: Für $A\in O(3)$ gilt:

$$\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & \det A\end{pmatrix}=P^T A P$$

mit $\det P=1$.

D.h. es gibt ein Koordinatensystem, in der die orthogonale Abbildung mit der Abbildungsmatrix A dargestellt wird durch obige Matrix.

Koordinatentransformation

Die Schreibweise eines Vektors in kartesischen Koordinaten bedeutet die Linearkombination der Basisvektoren unter Verwendung dieser Koordinaten (die Basisvektoren lässt man aber meist weg, wenn es sich um die natürliche Basis handelt):

$$\vec{x}_B=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}_B=x_1\,\vec{b}_1+x_2\,\vec{b}_2+\ldots+x_n\,\vec{b}_n\,.$$ ($\vec{b}_i$ sind bezüglich der natürlichen Basis)

Das kann man als Matrizenmultiplikation sehen:

$$x_1\,\vec{b}_1+\ldots+x_n\,\vec{b}_n=B\,\vec{x}_B\,.$$

Für die Koordinatentransformation von der natürlichen Basis mit Ursprung 0 zur Basis B mit Ursprung $\vec{p}$ gilt also:

Substitutionsformel: $\vec{x} = B\,\vec{x}_B + \vec{p}$;

Transformationsformel: $\vec{x}_B = B^{-1}(\vec{x} - \vec{p})$;

***Bemerkung**: Bei der Transformation mit der Substitutionsformel werden also zuerst die Koordinaten transformiert und dann der Ursprung verschoben. Bei der Rücktransformation mit der Transformationsformel geht das genau andersherum: zuerst Ursprung verschieben, dann mit der inversen Abbildungsmatrix die Koordinaten transformiert.*

Definition: Die Matrix, in deren Spalten die Koordinatenvektoren bezüglich der Basis B der Bilder $f(\vec{b}_i)$ stehen, heißt **Abbildungsmatrix von f bezüglich B**.

Satz: Für die Änderung der Abbildungsmatrix beim Basiswechsel gilt: Sei A eine Abbildungsmatrix und B eine Basis. Die Abbildung $\vec{y} = A\,\vec{x}$ lautet bezüglich B:

$\vec{y}_B = (A\,\vec{x})_B = C\,\vec{x}_B$

mit der Abbildungsmatrix

$C = \left((A\,\vec{b}_1)_B, \ldots, (A\,\vec{b}_n)_B\right)$.

Es gilt:

$C = B^{-1}\,A\,B$.

Definition: Zwei Matrizen A, C heißen **ähnlich**, wenn es eine invertierbare Matrix B gibt, so dass gilt:

$C = B^{-1}\,A\,B$.

13. Eigenwerte und Eigenvektoren

Definition: Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt **Eigenwert** einer Matrix bzw. einer linearen Abbildung, wenn es wenigstens einen Vektor $\vec{b} \neq \vec{0}$ gibt, so dass gilt:

$A\,\vec{b} = \lambda\,\vec{b}$ bzw. $f(\vec{b}) = \lambda\,\vec{b}$.

Jeder Vektor, der diese Gleichung erfüllt, heißt **Eigenvektor** von A zum Eigenwert λ.

Definition: Man bezeichnet als **charakteristisches Polynom** einer $n \times n$-Matrix das Polynom n-ten Grades:

$\chi_A(\lambda) := \det(A - \lambda\,E)$.

Satz: Es ist λ genau dann Eigenwert einer Matrix, wenn es Nullstelle des charakteristischen Polynoms χ ist, d.h. $\det(A - \lambda\,E) = 0$.

Definition: Die **Spur** einer Matrix ist die Summe ihrer Diagonalelemente.

Berechnung der Eigenwerte einer Matrix:

– Bestimmung aller Nullstellen der **charakteristischen Gleichung** $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda\,E) = 0$, das entspricht dem Erstellen einer Produktdarstellung des charakteristischen Polynoms:
  $\chi_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda_r - \lambda)^{k_r}$.

Die $\lambda_1 \ldots \lambda_r$ sind die Eigenwerte von A; die Vielfachheit k_i der Nullstelle λ_i heißt **algebraische Vielfachheit** des Eigenwerts λ_i.

– Zu jedem Eigenwert berechnet man den Lösungsraum des homogenen linearen Gleichungssystems
$(A - \lambda_i E)\vec{b} = 0$.
$$V(\lambda_i) := \left\{ \vec{b} \in \mathbb{C}^n ; (A - \lambda_i E)\vec{b} = 0 \right\} = \text{Kern}(A - \lambda_i E)$$
heißt **Eigenraum** zum Eigenwert λ_i.

Die Dimension des Eigenraumes $\text{Dim } V(\lambda_i)$ heißt **geometrische Vielfachheit** des Eigenwertes λ_i.

***Bemerkung**: Algebraische und geometrische Vielfachheit sind im Allgemeinen nicht gleich!*

Satz: Spur und Determinante einer Matrix haben folgende Ähnlichkeit:
$\text{Spur } A = k_1 \lambda_1 + \ldots + k_r \lambda_r$
$\det A = \lambda_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot \lambda_r^{k_r}$;
(λ_i sind die verschiedenen Eigenwerte mit jeweils der algebraischen Vielfachheit k_i).

***Bemerkung**: Jede obere oder untere Dreiecksmatrix hat ihre Diagonalelemente als Eigenwerte, weil:*
$\chi(\lambda) = \det(A - \lambda E) = (\alpha_1 - \lambda) \cdot \ldots \cdot (\alpha_n - \lambda)$.

Satz: Jede Linearkombination aus Eigenvektoren zum selben Eigenwert ist selbst wieder Eigenvektor zu diesem Eigenwert.

Beweis: $\vec{y}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_i \vec{x}_i$; die Vektoren $\vec{x}_i$ haben alle den gemeinsamen Eigenwert λ.
$$\vec{y}\left(\vec{f}(\vec{x})\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i \vec{f}(\vec{x}_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i (\lambda \vec{x}_i) = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i \vec{x}_i = \lambda \vec{y}(\vec{x}) = \vec{f}\left(\vec{y}(\vec{x})\right).$$

Satz: Eigenvektoren zu paarweise verschiedenen Eigenwerten der Matrix sind linear unabhängig.

Begründung (anschaulich): Die Abbildung entspricht einer Streckung. Haben Eigenvektoren verschiedene Eigenwerte, dann werden sie verschieden gestreckt, können daher nicht parallel sein (dann würden sie gleich gestreckt) und müssen deshalb linear unabhängig sein.

Man könnte diesen Satz auch beweisen, indem man in einem Widerspruchsbeweis versucht, den Nullvektor nicht-trivial zu kombinieren.

Satz: Besitzt eine $n \times n$-Matrix genau n linear unabhängige Eigenvektoren, dann kann man aus ihnen eine Transformationsmatrix B konstruieren:
$B = \left(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n\right)$,
so dass gilt:

$$B^{-1}\ A\ B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} =: D\ ;$$

Beweis: $A\ B = (A\ \vec{b}_1\ ,\ A\ \vec{b}_2\ ,\ \ldots\ ,\ A\ \vec{b}_n) = (\lambda\ \vec{b}_1\ ,\ \lambda\ \vec{b}_2\ ,\ \ldots\ ,\ \lambda\ \vec{b}_n) = B\ D\ .$

***Bemerkung**: Dieses Verfahren nennt man **Diagonalisierung** der Matrix* A *.*

Satz: Für eine symmetrische $n \times n$ -Matrix A gilt:
- A hat n linear unabhängige Eigenvektoren mit reellen Eigenwerten.
- Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal.
- Es gibt eine orthogonale $n \times n$ -Matrix O, so dass $O^{-1}\ A\ O$ diagonal ist.
- λ ist k-fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms $\Leftrightarrow$ A hat k linear unabhängige Eigenvektoren zum Eigenwert λ .
- geometrische Vielfachheit = algebraische Vielfachheit
- Es gibt eine Orthonormalbasis von Eigenvektoren.

Satz: A und B haben ein gemeinsames vollständiges Orthonormalsystem (VONS) von Eigenvektoren genau dann, wenn $A\ B = B\ A$ gilt. Man nennt sie **gleichzeitig diagonalisierbar**, d.h. in der gemeinsamen Orthonormalbasis gilt:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_n \end{pmatrix}\ ,\ \tilde{B} = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 \\ 0 & \beta_n \end{pmatrix}\ ;\ \tilde{A}\ \tilde{B} = \begin{pmatrix} \alpha_1\ \beta_1 & 0 \\ 0 & \alpha_n\ \beta_n \end{pmatrix} = \tilde{B}\ \tilde{A}\ ;$$

Beweis:

$\tilde{A} = C^{-1}\ A\ C\ ;\ \tilde{B} = C^{-1}\ B\ C\ ;$

$A = C\ \tilde{A}\ C^{-1}\ ;\ B = C\ \tilde{B}\ C^{-1}\ ;$

$A\ B = C\ (\tilde{A}\ \tilde{B})\ C^{-1} = C\ \tilde{B}\ \tilde{A}\ C^{-1} = C\ C^{-1}\ B\ C\ C^{-1}\ A\ C\ C^{-1} = B\ A\ ;$

Satz: Jede orthogonale Transformation im $\mathbb{R}^3$ lässt sich darstellen als eine Hintereinanderausführung von (einer oder mehrerer) Drehungen und höchstens einer Spiegelung.

Anhang: Vokabular

Englisch	Deutsch
mapping	Abbildung
set	Menge
domain of	Definitionsmenge von
co-domain of	Bildmenge bzw. Wertemenge von
p is an element of the set A	p ist ein Element der Menge A
field	(mathematischer) Körper
Vector Space Homomorphism	Vektorraum-Homomorphismus
parallelepiped	3-Spat bzw. Parallelepiped
an image which preserves some properties	ein Bild, das einige Eigenschaften bewahrt
... denotes a mapping from A into B	... bedeutet eine Abbildung von A nach B
f(a) – read "f of a" – ... the image of a under f	
to scribble	kritzeln
to gobble	verschlucken
to deceive	betrügen
Cramer's rule	Cramer-Regel
vector equation	Vektorgleichung
triangular matrix	Matrix in Zeilenstufenform
n unknowns	n Unbekannte
linear combination	Linearkombination
scale	Skalar
singular case	(wenn es keine eindeutige Lösung gibt)
singular	merkwürdig
infinity of solutions	unendlich viele Lösungen
x-y plane	x-y-Ebene
to work in twos/threes	zu zweit/dritt arbeiten
to be out of the woods	aus dem Schneider sein
f' "f dash"	„f Strich“
"I see troubled faces ..."	(kein Kommentar)
linear dependence	lineare Abhängigkeit
linearly independent	linear unabhängig
unit matrix	Einheitsmatrix
quantum mechanics	Quantenmechanik
constraint	Bedingung

Englisch	**Deutsch**
purposely	absichtlich
moronic	schwachsinnig
to cackle	
counterexample	Gegenbeispiel
reflection	Spiegelung
rotation	Drehung
shearing	Scherung
to shear	scheren
the vector space of polynomials of finite degree	der Vektorraum der Polynome endlichen Grades
if and only if	genau dann wenn
one and only one	genau ein
contradictory	widersprüchlich
mutually	gegenseitig, wechselseitig, aufeinander
arbitrary	beliebig, willkürlich
linear transformation	lineare Transformation
cipher	Chiffre, verschlüsselte Botschaft
lateral displacement	seitliche Verschiebung
to converge	konvergieren
series	Zahlenfolge
degree of accuracy	Grad der Genauigkeit
bone and tissue	Knochen und Gewebe
trace	Spur
eigenvalue	Eigenwert
eigenvector	Eigenvektor
normalised to unity	auf 1 normiert
... are of unit magnitude	... haben die Größe 1
similarity transformation	Ähnlichkeitsabbildung
to deduce	herleiten
characteristic polynomial	charakteristisches Polynom
determinant	Determinante
with the aid of the Schmidt procedure	mit Hilfe des Schmidtschen (Orthonormalisierungs-)Verfahrens
row space	Zeilenraum
column space	Spaltenraum

Englisch	***Deutsch***
to obtain	erhalten, ermitteln
to satisfy an equation	eine Gleichung erfüllen