Zusammenfassung

Mathematik für Physiker
Analysis

Kapitel 13 – 17 des Vorlesungsskripts Mathematik für Physiker

nach dem Buch „Analysis 1“ von Prof. Dr. Königsberger, Springer Verlag

TU München
2. Semester, SS 2000

von Christoph Moder

http://www.skriptweb.de

Hinweise (z.B. auf Fehler) bitte per eMail an uns: mail@skriptweb.de - Vielen Dank.

Inhaltsverzeichnis

13. Parameterisierte Kurven

Definition: Eine Abbildung (= Funktion), die ein Intervall $I \in \mathbb{R}$ auf einen Vektor abbildet, heißt **parameterisierte Kurve** im $\mathbb{R}^n$.

Sie ist (**stetig**) **differenzierbar**, wenn es alle Komponenten des Vektors sind.

Den Graph nennt man **Spur**.

Achtung: Zwei Kurven können die gleiche Spur haben, diese jedoch in verschiedenen Richtungen durchlaufen. Der **mathematisch positive Sinn** ist hier der **Gegenuhrzeigersinn**.

Definition: Die Figur, die ein Punkt auf einer rollenden Einheitsscheibe beschreibt, nennt man **Zykloide**. Ist der Punkt auf dem Rand, nennt man die Zykloide **gewöhnlich**, ist er weiter innen, dann ist sie **verkürzt**, ist er weiter außen, ist sie **verlängert**.
Rollt die Einheitsscheibe innen in einem Kreis, spricht man von einer **Hypozykloide**, rollt sie außen herum, von einer **Epizykloide**.

[im Skript: Schraubenlinie Ganghöhe]

Definition: Die Ableitung $\dot{\gamma}(t) = \mathrm{d}\gamma / \mathrm{d}t$ heißt **Tangential- oder Geschwindigkeitsvektor** der Kurve.

Physikalisch gesehen: Wenn $\gamma(t)$ der Ortsvektor ist, dann ist die Ableitung des Ortes nach der Zeit die Geschwindigkeit.

Weil sich eine Kurve auch überkreuzen kann (und dann am Kreuzungspunkt zwei verschiedene Ableitungen hat), ergibt sich: Der Geschwindigkeitsvektor ist nur vom Parameter t, nicht vom Ort abhängig.

Definition: $\|\dot{\gamma}(t)\|$ heißt **Geschwindigkeit**.
$T_\gamma = \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|}$ heißt **Tangentialeinheitsvektor** an der Stelle t.

Er hat die Richtung des Geschwindigkeitsvektors, aber die Länge 1.

Definition: Wenn an einer Stelle der Geschwindigkeitsvektor (und damit Geschwindigkeit) nicht 0 ist, sagt man, die Kurve sei **regulär** an dieser Stelle. Sie ist **regulär**, wenn sie an allen Stellen regulär ist.

Achtung: An einer Irregularität ist nur die Geschwindigkeit Null, man sieht es der Spur also nicht unbedingt an!

Definition: Der Vektorraum der **n-mal stetig differenzierbaren Funktionen** heißt C^n .

Definition: Unter dem **parameterisierten Graph** einer C^1 -Funktion f versteht man die Kurve $\gamma_f(t) := (t, f(t))$.

Dabei gilt: $\dot{\gamma}_f(t) = (1, f'(t)) \neq \vec{0}$, der parameterisierte Graph ist also immer regulär.

Satz: Hat bei $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ die Funktion $\dot{x}$ keine Nullstelle, dann kann die Spur dort als parameterisierten Graph ansehen: es gibt eine stetig differenzierbare Funktion f auf $J = x(I)$, deren Graph gleich der Spur von γ ist. Es gilt:

$f'(x_0) = \frac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)}$ (Merkregel: $\frac{\mathrm{d}\, y}{\mathrm{d}\, x} = \frac{\mathrm{d}\, y / \mathrm{d}\, t}{\mathrm{d}\, x / \mathrm{d}\, t}$).

Ist γ zweimal differenzierbar, dann ist es auch f:

$$f''(x_0) = \frac{\dot{x}\,\ddot{y} - \ddot{x}\,\dot{y}}{\dot{x}^3}(t_0) \ .$$

Definition: Das **Standard-Skalarprodukt** zweier Vektoren ist (wie in der linearen Algebra):

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n \ .$$

Anwendung: Zwei sich schneidende reguläre Kurven α, β haben als Schnittwinkel φ zwischen den Tangentialeinheitsvektoren: $\cos \varphi = T_\alpha \cdot T_\beta$.

Definition: Eine stetige Kurve heißt **rektifizierbar**, wenn die Menge der Längen der einbeschriebenen Sehnenpolygone beschränkt ist (also die Längen gegen einen Wert konvergieren). Dieser Wert, das Supremum der Längen, heißt **Länge der Kurve**.

Satz: Eine stetig differenzierbare Kurve mit kompaktem Parameterintervall ist rektifizierbar.

Es hat die **Länge** $s(\gamma) = \|\dot{\gamma}(t)\|\,\mathrm{d}\, t = \int_a^b \sqrt{x_1^2(t) + \ldots + x_n^2(t)}\,\mathrm{d}\, t$.

Insbesondere hat der Graph einer C^1 -Funktion die Länge $s(\gamma_f) = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\,\mathrm{d}\, x$.

[nicht im Skript: Parameterwechsel]

Krümmung (nicht im Skript)

Definition: $N(t) := D\,T(t)$ heißt **Normaleneinheitsvektor** (D bedeutet: Drehung um 90°, wenn man $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ setzt, dann entspricht D einer Multiplikation mit i). Das Paar $(T(t), N(t))$ heißt das **begleitende Zweibein der Kurve**.

Definition: Die **Krümmung** einer Kurve mit Einheitsgeschwindigkeit 1 ist $\kappa(s) = T'(s) \cdot N(s)$. Der **Betrag der Krümmung** ist gleich der Änderung des Geschwindigkeitsvektors $|\kappa(s)| = \|T'(s)\|$. (Hat die Kurve eine andere Geschwindigkeit, muss man sie umparameterisieren).

Definition: $\rho(t) := 1/\kappa(t)$ heißt **Krümmungsradius**, $m(t) := \gamma(t) + \rho(t)\,N(t)$ heißt **Krümmungsmittelpunkt**. Um diesen Mittelpunkt liegt der **Krümmungskreis** mit Radius $|\rho(t)|$. Die durch alle Krümmungsmittelpunkte definierte Kurve heißt **Evolute**.

[Nicht im Skript, sondern Königsberger: Die Sektorfläche ebener Kurven]

Kurven in Polarkoordinaten

Man kann Bewegungen auch in Polarkoordinaten beschreiben:

$\gamma(t) = r(t)\, e^{i\varphi(t)}$;

Umgerechnet in kartesische Koordinaten: $x(t) = r(t) \cos\varphi(t)$ bzw. $y(t) = r(t) \sin\varphi(t)$.

14. Elementar integrierbare Differenzialgleichungen

$y(t)$ bezeichne den Bestand einer Population zum Zeitpunkt t.

Definition: Der Grenzwert $\dfrac{\dot{y}(t)}{y(t)}$ heißt **Wachstumsrate zum Zeitpunkt t**.

Definition: Sucht man eine Wachstumsfunktion y bei gegebenem Anfangsbestand y_0 zum Zeitpunkt t_0 und Funktion $k(t, y(t)) = \dot{y}(t) / y(t)$, so nennt man das ein **Anfangswertproblem (AWT)** bzw. **initial value problem**. Die Funktion k heißt **Änderungsrate**.

Es gilt: $\dot{y} = k(t, y) \cdot y$ und $y(t_0) = y_0$. Falls $k = const$, dann gilt: $y(t) = y_0 \cdot e^{k(t-t_0)}$.

Definition: Gleichungen der Art $y' = a(x)\, y + b(x)$ heißen **lineare Differenzialgleichungen 1. Ordnung**. a und b sind stetige Funktionen, b ist die **Inhomogenität**.

Wie bei Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten gilt:

Man erhält die allgemeine Lösung durch Addition der homogenen Lösungen zu einer partikulären Lösung.

Es gilt: $y_h = c \cdot e^A$ (mit $A = \int a\, \mathrm{d}x$, $c \in \mathbb{C} = const$); y_p z.B. durch Variation der

Konstanten ermitteln;

$\Rightarrow \quad y = (u + c)\, e^{A} \quad ;$

Differenzialgleichungen mit getrennten Variablen

Beispiel: $y' = g(x)\, h(y)$.

1. Sämtliche Nullstellen der homogenen Differenzialgleichung finden (charakteristisches Polynom)
2. Trennung der Variablen:
   $\frac{\mathrm{d}\, y}{h(y)} = g(x)\, \mathrm{d}\, x \quad ;$
3. Beide Seiten der Gleichung unbestimmt integrieren

Bernoullische Differenzialgleichungen (nicht im Skript)

Wenn die Wachstumsrate auch vom augenblicklichen Bestand abhängt (z.B. Tierpopulationen: wenn es zu viele werden, wird das Futter knapp), gelten folgende Gleichungen:

Definition: Eine Gleichung der Art $y' = a(x) \cdot y + b(x) \cdot y^{\alpha} \quad (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\})$ nennt man **Bernoullische Differenzialgleichung**.
Ein Sonderfall dieser Gleichung ist die **logistische Gleichung** $\dot{y} = (a - b\, y)\, y$.

15. Lokale Approximation von Funktionen: Taylorpolynome und -reihen

Lineare Approximation

$F(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ approximiert die Funktion f um a , falls diese dort differenzierbar ist.

Approximation durch Taylorpolynome

f soll durch ein Polynom approximiert werden, so dass gilt: $T(a) = f(a)$, $T'(a) = f'(a)$ usw.

Bei der Ableitung ergibt sich: $T^{(k)}(a) = k!\, a_k$ (normale Ableitungsregel), so dass für die Koeffizienten gilt: $a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)$. Es gibt also genau ein Polynom eines Grades kleiner/gleich n, das diese Kriterien erfüllt.

Definition: $T_n f(x; a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x)(x - a)^{n}$ heißt **n-tes Taylorpolynom** an der Stelle a.
Es definiert die **Schmiegparabel** für f an der Stelle a.

Die Abweichung der Schmiegparabel von der Funktion ist $R_{n+1}(x) := f(x) - T_n f(x; a)$ ..

Definition: $R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!} \int_{a}^{x} (x - t)^{n} f^{(n+1)}\, \mathrm{d}\, t$ heißt **Integralform des Restgliedes**.

Es gibt zwischen a und x ein ξ (gemäß Mittelwertsatz), so dass gilt:

Definition: $R_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ heißt **Lagrange-Form des Restgliedes**.

Aus der Integralform ergibt sich:

$f(x) = T_n f(x) + (x-a)^n R(x)$; mit eingesetzter Lagrange-Formel für $R(x)$ ergibt sich wegen der Stetigkeit, dass $\lim_{x \to a} R(x) = 0$.

[im Skript: Landau-Symbol]

[im Skript: Symbol O (Ordnung)]

Definition: Die Potenzreihe $T f(x) = \sum_0^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ einer unendlich oft differenzierbaren Funktion heißt die **Taylorreihe von f in a**.
Konvergiert die Taylorreihe von f gegen f in einer Umgebung U um a, sagt man, f hat eine **Taylorentwicklung in U mit Entwicklungspunkt a**.

Eine Funktion und ihre Taylorreihe sind nur in ihrem Entwicklungspunkt gleich; außerhalb von a muss die Taylorreihe nicht oder nicht gegen die Funktion konvergieren.

Definition: Eine Funktion heißt **analytisch in a**, wenn es eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius gibt: $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k$.
Eine Funktion heißt **analytisch**, wenn sie überall analytisch ist.

[Königsberger: Weiteres über Potenzreihen, Bernoulli-Zahlen, Cotangensreihe, Bernoulli-Polynome]

Das Newton-Verfahren zur Nullstellenberechnung

Kennt man eine grobe Abschätzung x_0 einer Nullstelle einer Funktion f und möchte diese Abschätzung verbessern, kann man die lineare Näherung verwenden:

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) \quad ; \quad L(x) = 0 \quad ; \quad \Rightarrow \quad x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad ;$$

x ist jetzt eine bessere Abschätzung der Nullstelle.

Konvergenzsatz: Es gelte:
1. f hat in [a, b] eine Nullstelle
2. im Intervall gilt $f'(x) \neq 0$
3. im Intervall ist f entweder konvex $(f''(x) \geq 0)$ oder konkav $(f''(x) \leq 0)$
4. die Iterationsreihen mit $x_0 = a$ und $x_0 = b$ liegen komplett im Intervall

Dann gilt die Newton-Iterationsfolge mit jedem beliebigen Startwert aus dem Intervall und konvergiert gegen die Nullstelle.

16. Globale Approximation von Funktionen: Gleichmäßige Konvergenz

Definition: Gilt $\|f_n - f\| < \varepsilon \quad \forall\ n > n$ (d.h. die f_n liegen im ε -Schlauch um f), nennt man f_n **gleichmäßig konvergent** gegen f .
f ist dann die **Grenzfunktion** der Folge.

Satz: Eine Grenzfunktion einer gleichmäßig konvergenten Folge stetiger Funktionen ist ebenfalls stetig.
Eine Grenzfunktion einer gleichmäßig konvergenten Folge von Regelfunktionen ist ebenfalls eine Regelfunktion; das Integral der Regelfunktion ist gleich dem Grenzwert des Integrals der Folge.

Satz: In einem Intervall: Eine Folge dort stetig differenzierbarer Funktionen konvergiere punktweise und ihre Ableitung konvergiere gleichmäßig auf dem Intervall. Dann ist die Grenzfunktion stetig differenzierbar und $f'(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f'_n(x)$.

Cauchy-Kriterium: Wenn es für alle $\varepsilon > 0$ ein passendes N gibt, so dass gilt: $\|f_n - f_m\| < \varepsilon \quad \forall\ m, n > N$, dann konvergiert die Folge gleichmäßig auf dem Definitionsintervall.

Korollar: Wenn es für alle $\varepsilon > 0$ ein passendes N gibt, so dass gilt: $\left\|\sum\limits_{n}^{m} f_k\right\| < \varepsilon \quad \forall\ m \geq n \geq N$, konvergiert die Reihe der Funktionen gleichmäßig auf dem Definitionsintervall.

Majrorantenkriterium: Jede auf D normal konvergente Reihe (d.h. wenn die Reihe der Normen der Funktion konvergiert) ist auf D auch gleichmäßig konvergent.

Die Normalkonvergenz ist also ein strengeres Kriterium.

Beweis: Korollar, und Summe von Normen $\geq$ Norm der Summe.

Definition: Eine Folge konvergiert **lokal-gleichmäßig**, wenn eine Umgebung im Definitionsbereich existiert, in dem die Folge gleichmäßig konvergiert.

Definition: Eine Familie $\{I_k\}_{k \in K}$ offener Intervalle I_k (K sei Indexmenge), bei der jeder Punkt der Menge A in mindestens einem I_k liegt, heißt **offene Überdeckung** von A. $A \subset \bigcup\limits_{k \in K} I_k$.

Definition: Kann man aus einer offenen Überdeckung endlich viele Intervalle auswählen, die immer noch A überdecken, dann hat A die **Heine-Borel-Überdeckungseigenschaft**. $A \subset \bigcup\limits_{\nu=1}^{n} I_{k\,\nu}$.

Überdeckungssatz von Heine-Borel: A ist kompakt $\Leftrightarrow$ A hat H-B-Überdeckungseigenschaft.

Satz: Eine lokal-gleichmäßig konvergente Funktionenfolge auf einem offenen Intervall konvergiert auf jeder kompakten Teilmenge des Intervalls gleichmäßig.

Beweis: Jeder Punkt der Teilmenge liegt in einem offenen Intervall, in dem die Funktionenfolge gleichmäßig konvergiert. Weil die Teilmenge kompakt ist, wird sie von endlich vielen

Intervallen überdeckt (Überdeckungssatz von Heine-Borel). Die Funktionenfolge konvergiert in der Vereingungsmenge der Intervalle und daher in der Teilmenge.

Definition: Es sei $\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists$ Polynom p, so dass gilt $\| f - p \|_K < \varepsilon$ (K kompakt). Die Menge der stetigen Funktionen f, die durch ein Polynom beliebig genau approximierbar sind, heißt $\overline{P} = \overline{P(K)}$.

Hilfssätze:

1. $f \in \overline{P}\ ,\ g \in \overline{P} \Rightarrow f + g \in \overline{P}$
2. $f, g \in \overline{P} \Rightarrow |f| \in \overline{P}\ ,\ \max(f, g) \in \overline{P}\ ,\ \min(f, g) \in \overline{P}$
3. [...]

Weierstraßscher Approximationssatz: Zu jeder stetigen Funktion f auf einer kompakten Menge K gibt es ein Polynom p, so dass gilt: $|f(x) - p(x)| < \varepsilon \quad \forall\ \varepsilon > 0\ ,\ \forall\ x \in K$.

17. Approximation periodischer Funktionen: Fourierreihen

Definition: Ein **trigonometrisches Polynom** mit Grad $\leq n$ ist eine Funktion der Art:

$$T(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k\, e^{i k x} \qquad x \in \mathbb{R}\ ,\ c_k \in \mathbb{C}\ .$$

Summen und Produkte trigonometrischer Polynome sind ebenfalls trigonometrische Polynome.

Mit der Euler-Formel für komplexe Zahlen kann man trigonometrische Polynome auch mit Sinus und Cosinus ausdrücken:

$$T(x) = \frac{a_0}{2} \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos k x + b_k \sin k x)\ ;$$

$a_k = c_k + c_{-k}\ ;\quad a_0 = 2\, c_0\ ;$
$b_k = i\,(c_k - c_{-k})\ ;$

$c_k = \frac{1}{2}(a_k - i\, b_k)\ ;\quad c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + i\, b_k)$; Es gilt also: $c_k = \overline{c}_{-k}$ (konjugiert komplex);

Definition: $\delta_{nm} = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}\ ;\ \delta_{nm}$ heißt **Kronecker-Symbol**.

Definition: $\int_0^{2\pi a} e^{i n \frac{x}{a}}\, e^{i m \frac{x}{a}}\, \mathrm{d}x = 2\,\pi\, a \cdot \delta_{nm}$ heißt **Orthogonalitätsrelation**.

a gibt die Periodizität an

Allgemein ist eine Orthogonalitätsrelation: $\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\, f_m(x)\, \mathrm{d}x$.

Definition: Es sei $\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists$ trigonometrisches Polynom T, so dass gilt $|f - T| \leq \varepsilon \quad \forall\ x \in \mathbb{R}$. Die Menge der 2π -periodischen stetigen

Funktionen f, die durch ein trigonometrisches Polynom beliebig genau approximierbar sind, heißt $\overline{T}$.

Analog zur Menge $\overline{P}$ der durch Polynome approximierbaren Funktionen!

Achtung: Oft kann man nichtperiodische Funktionen in einem entsprechenden Intervall als periodisch betrachten!

Satz von Fejér und Dirichlet: Jede stetige Funktion f in $[-\pi,\pi]$ mit $f(x)=f(-x)$ lässt sich mit beliebiger Genauigkeit durch trigonometrische Polynome approximieren.
An eventuellen Sprungstellen konvergiert diese Approximation gegen das arithmetische Mittel der beiden links- und rechtsseitigen Grenzwerte.

Definition: $\hat{f}(k):=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,e^{-ikx}\,\mathrm{d}x \quad k\in\mathbb{Z},\ \hat{f}\in\mathbb{C}$ heißt **k-ter Fourierkoeffizient** der Funktion f.

Definition: $S_n f(x):=\sum_{k=-n}^{n}\hat{f}(k)\,e^{ikx}$ heißt **n-tes Fourierpolynom** der Funktion f.

Definition: $S_\infty f(x):=\lim_{n}^{\infty} S_n f(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\hat{f}(k)\,e^{ikx}$ heißt **Fourierreihe** der Funktion f, falls der Grenzwert existiert.

Das Fourierpolynom lässt sich auch durch Sinus und Cosinus darstellen:

$$S_n f(x)=\frac{a_0}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx) \quad \text{mit} \quad a_k=\hat{f}(k)+\hat{f}(-k)\ ,$$
$$b_k=i\left(f(k)-f(-k)\right)\ ;$$

Daraus folgt:

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x \qquad k=0,1,2,\ldots\ ;$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x \qquad k=1,2,3,\ldots\ ;$$

Folgerung: Ist f ungerade, dann ist a_k gleich 0, ist f gerade, dann ist b_k gleich 0.

Identitätssatz: Seien bei zwei stetige Funktionen f, g mit $\hat{f}(x)=\hat{g}(x)$, so folgt $f(x)=g(x)$.

Darstellungssatz: Ist f stetig und konvergiert ihre Fourierreihe gleichmäßig auf ganz $\mathbb{R}$, so sind sie identisch: $f=S_\infty f$.

Definition: Der Grenzwert $\lim_{t\uparrow x}\frac{f(t)-f(x_-)}{t-x}$ bzw. $\lim_{t\downarrow x}\frac{f(t)-f(x_+)}{t-x}$ heißt **linksseitige** bzw. **rechtsseitige Ableitung** von f in x.

Satz: Die 2π -periodische komplexwertige Regelfunktion f (d.h. $\in R(T)$) besitze eine links- und rechtsseitige Ableitung. Dann konvergiert ihre Fourierreihe an Stetigkeitsstellen gegen die Funktion und an Unstetigkeitsstellen gegen den arithmetischen Mittelwert der beiden rechts- und linksseitigen Grenzwerte.

Riemannsches Lemma: Für jede Regelfunktion φ gilt:

$$\lim_{p\to\infty} \int_a^b \varphi(x)\cdot\sin p\,x\cdot\mathrm{d}\,x = 0 \quad .$$

Anschaulich: Wenn p gegen Unendlich geht, wird die Periode der Sinusschwingung immer kürzer. Die positive und negative Fläche heben sich beim Integral des Sinus über eine Periode auf. Je kürzer die Periode, desto mehr ganze Perioden passen in ein beliebiges Intervall, der übrig bleibende Rest einer Periode wird immer kleiner und geht gegen 0. Die Regelfunktion führt zwar zu einer Amplitudenmodulation, aber ändert sonst nichts.

Definition: $D_n(x) := \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}$ heißt **Dirichlet-Kern n-ten Grades**.

Es gilt: $$D_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}x\right)}{\sin\frac{x}{2}} & x\notin 2\pi\mathbb{Z} \\ \frac{1}{2\pi}(2n+1) & x\in 2\pi\mathbb{Z} \end{cases};$$

Dirichletsches Lemma: $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\,\mathrm{d}\,t = 1$ für alle n;

$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,D_n(t)\,\mathrm{d}\,t$ geht für $n\to\infty$ gegen den arithmetischen Mittelwert der links- und rechtsseitigen Grenzwerte von f an der Stelle 0.

Definition: Eine 2π -periodische komplexwertige Regelfunktion heißt **stückweise stetig differenzierbar**, wenn man das Periodenintervall so zerlegen kann, dass es in den abgeschlossenen Teilintervallen stetig differenzierbare Funktionen gibt, die mit der Funktion in den offenen Teilintervallen übereinstimmt.

Die Funktion kann also (an den Teilintervallgrenzen) Sprungstellen haben.

Satz: Die Fourierreihe einer stückweise stetig differenzierbaren Funktion konvergiert in jedem Intervall, das keine Unstetigkeitsstelle der Funktion beinhaltet, gleichmäßig.

Achtung: An den Unstetigkeitsstellen konvergiert die Funktion also nicht gleichmäßig. Graphisch erkennt man dort das **Gibbs-Phänomen**: Der Graph der Fourierreihe zeigt dort ein Überschwingen (mit $S_n f - f > 0{,}089\,\pi$ unabhängig von n).

Bei einer reellen Funktion sind die Fourierkoeffizienten die Amplituden der Trägerschwingungen, aus denen sich die Funktion zusammensetzt.

Der Oberschwingungsanteil bzw. Klirrfaktor ist $\sqrt{\dfrac{\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left|c_n^2\right|}{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|c_n^2\right|}}$,

also die Koeffizienten der Oberschwingungen geteilt durch die der gesamten Schwingung (n = 1: Grundschwingung).