Eine Mitschrift der Vorlesung

Mathematik für Physiker
Lineare Algebra

(unvollständig)

nach dem Buch „Analysis 1“ von Prof. Dr. Königsberger, Springer Verlag

Prof. Harald Friedrich
TU München
2. Semester, SS 2000

Datum: 09.07.2000

von Michael Wack, Christoph Moder, Manuel Staebel

http://www.skriptweb.de

Hinweise (z.B. auf Fehler) bitte per eMail an uns: mail@skriptweb.de - Vielen Dank.

Inhaltsverzeichnis

***Vorwort**: Diese Mitschrift ist kaum nachbearbeitet, und daher auch stellenweise lückenhaft – auf keinen Fall ein Ersatz für z.B. ein gutes Buch. Das liegt vor allem an der Art der Vorlesung: Herr Professor Friedrich schreibt wenig Text, sondern erklärt viel, eher Entertainer als jemand, der sein Skript langweilig abliest. Durch seine Fähigkeit, beliebig komplizierte Überlegungen „in Echtzeit" während einer Erklärung durchzuführen, und den daraus resultierenden geistigen Höhenflügen, konnte ich oft nicht folgen. Die größte Tafel ist ihm zu klein, immer wieder wischt er einen Bereich und schreibt dort den Beweis weiter, für den er am anderen Ende der Tafel keinen Platz mehr hatte, bis diese ein komplettes Patchwork aus verschiedenen Herleitungen und Beweisen ist – bei seiner Geschwindigkeit ist es schon schwer, zu folgen, und erst recht, mitzuschreiben.*

Aber vielleicht erkennt man zumindest die Ideen, die dahinter stecken, und ab und zu eine andere Vorgehensweise als im Buch „Höhere Mathematik 1" von Meyberg / Vachenauer, an dem sich die Vorlesung orientiert.

Wiederholung

Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix};$$

; ;

Spaltenvektoren: $\vec{S}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$;

Zeilenvektor: $\vec{Z}_i = \left(a_{i1} , a_{i2} , \ldots , a_{i\text{¿}} \right)$;

Matrixmultiplikation: $A_{m \times n} \cdot B_{n \times l} = C$; $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj} = Z_i \, (A) \cdot S_j \, (B)$;

Matrixgleichung mit n Unbekannten:

$$\begin{matrix} a_{11} \, x_1 + a_{12} \, x_2 + \ldots + a_{1n} + x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1} \, x_1 + a_{m2} \, x_2 + \ldots + a_{mn} + x_n = b_n \end{matrix} ;$$

auch darstellbar: $\underset{m \times n}{A} \; \underset{n \times l}{\vec{x}} = \vec{b}$;

homogene Gleichung: $\vec{b} = 0$; $A \, \vec{x} = 0$;

Anzahl der frei wählbaren x_i : $n -$ Rang der Matrix

Lineare Abhängigkeit: $\vec{Z}_i$ ist linear abhängig: es existiert eine $Z_k = \sum_{i \pm k} c_i \cdot Z_i$ mit $\sum_i d_i \, Z_i = 0$ also eine nicht-triviale Linearkombination

Lineare Unabhängigkeit: $\vec{Z}_i$ ist linear unabhängig, wenn $\sum_i d_i \, Z_i = 0 \Rightarrow$ alle $d_i = 0$.

Rang einer Matrix: die maximale Anzahl von linear unabhängigen Zeilenvektoren (könnte man auch über Spaltenvektoren definieren)

inhomogene Gleichung: Schreibweise als $\underset{m \times (n+1)}{A \; b}$; lösbar: Rang $(A \; b) =$ Rang $A \Rightarrow A \, \vec{x} = \vec{b}$;

$\left| A \, \vec{x}_{spez} = \vec{b} \right| = \vec{x}_{allg} = \vec{x}_{hom} + \vec{x}_{spez}$;

Transponierte Matrix: A^T : $\left(A^T \right)_{ij} = (A)_{ji}$; $\left(A^T \right)^T = A$; $\underset{m \times l}{\left(A_{m \times n} \cdot B_{m \times l} \right)^T} = \underset{l \times m}{\left(B^T \right) \cdot \left(A^T \right)}$;

quadratische Matrizen: $n \times n$: $A_{n \times n} \cdot B_{n \times n} = C_{n \times n}$

$A \, (B + C) = A \, B + A \, C$; $A \cdot B \neq B \cdot A$:

Einheitsmatrix $\cdot A = A \cdot$ Einheitsmatrix $= A$; $A^{-1} \cdot A =$ Einheitsmatrix $= A \cdot A^{-1}$;

$\left(A \cdot B \right)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$;

Vektorräume

$V = \{ \vec{v} \}$; $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$; $c \in \mathbb{R}$: $c \, (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = c \cdot \vec{v}_1 + c \cdot \vec{v}_2$;

Linearkombination: $c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2 + \ldots + c_n \vec{v}_n = \vec{v}$;

$\left\{ \text{Linearkombinationen } \left(\vec{v}_1 \ldots \vec{v}_n\right)\right\}$ = lineare Hülle $\left(\vec{v}_1 \ldots \vec{v}_n\right)$

Unterraum: $U \subset V$; U ist selbst ein Vektorraum;

linear unabhängig: $\vec{v}_1 \ldots \vec{v}_n$ sind linear unabhängig, wenn es keine nichttriviale Linearkombination gibt, die 0 ergibt: $\sum_i^n c_i \vec{v}_i = 0 \Rightarrow c_i = 0 \quad \forall\ i$

Dimension: die maximale Anzahl linear unabhängiger Vektoren

$V = \left\{ f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \right\}$

Basis: $\left\{ \vec{v}_1 , \vec{v}_2 \ldots \right\}$: linear unabhängig, und $\forall\ \vec{v} \in V : \vec{v} = \sum c_i \vec{v}_i$ (jeder Vektor aus dem Vektorraum lässt sich linear kombinieren); jede Menge von n linear unabhängigen Vektoren ist eine Basis

Basiswechsel

n-dimensionaler Vektorraum V: Basis $\vec{v}_1 , \vec{v}_2 , \ldots , \vec{v}_n$

$\vec{v} = v_1 \vec{v}_1 + v_2 \vec{v}_2 + \ldots + v_n \vec{v}_n = v_1{}' \vec{v}_1 + v_2{}' \vec{v}_2 + \ldots + v_n{}' \vec{v}_n$;

$\vec{v} - \vec{v} = 0 = \left(v_1 - v_1{}'\right) \vec{v}_1 + \ldots + \left(v_n - v_n{}'\right) \vec{v}_n$;

Basis $\vec{w}_1 , \vec{w}_2 , \ldots , \vec{w}_n$;

$\vec{v}_i = \sum_{j=1}^n r_j \vec{w}_j$; jeden Basisvektor kann man als Linearkombination von Vektoren einer anderen Basis schreiben

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^n v_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^n v_i \left(\sum_{j=1}^n r_{ij} \vec{w}_j \right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n v_i r_{ij} \right) \vec{w}_j = w_1 \vec{w}_1 + w_2 \vec{w}_2 + \ldots + w_n \vec{w}_n ;$$

$$w_i = \sum_{i=1}^n v_i r_{ij} ;$$

$$\left(w_1 \ldots w_n\right) = \left(v_1 \ldots v_n\right) R \text{ mit } R = \left(r_{ij}\right) ;$$

$$\vec{w}_i = \sum_{j\,0\,1}^n s_{ij} v_j ;\ \vec{v} = \sum_{i=1}^n w_i \vec{w}_i = \sum_{i=1}^n w_i \sum_{j=1}^n s_{ij} \vec{v}_j = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n w_i s_{ij} \right) \vec{v}_j ;$$

$$\underset{1\times n}{w} = \underset{1\times n}{v} \cdot R ;$$

1. Elementarmatrizen

Elementarmatrizen sind quadratische Matrizen, mit denen sich durch Multiplikation elementare Zeilen- bzw. Spaltenumformungen durchführen lassen.

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} \vec{z}_1 \\ \vdots \\ \vec{z}_m \end{pmatrix} ,\ \vec{z}_i = \left(\vec{a}_{i\,1} , a_{i\,n} , \ldots , a_{i\,n} \right)$$

Kroneckersymbol: $\delta_{n_1, n_2} = \begin{cases} 1 \text{ falls } n_1 = n_2 \\ 0 \text{ falls } n_1 \neq n_2 \end{cases}$

Elementare Zeilenumformungen (EZU)

1. $\vec{z}_i \Leftrightarrow \vec{z}_j$

$$E = \begin{cases} \delta_{k,l} \text{ falls } (k,l) = \begin{matrix} i,i & j,j \\ i,j & j,i \end{matrix} \\ E_{i,i} = E_{j,j} = 0 \\ E_{i,j} = E_{j,i} = 1 \end{cases}$$

$$(E \cdot A)_{k,l} \overset{k \pm (i,j)}{=} \sum_q E_{k,q} \cdot A_{q,l}$$

2. $\vec{z}_i \Rightarrow \lambda\ \vec{z}_i\ ; \quad \lambda \neq 0$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. $\vec{z}_i \Rightarrow \vec{z}_i + \lambda \cdot z_j$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(E \cdot A)_{k,l} = \sum_{q=1}^{m} E_{k,q} \cdot A_{q,l} \overset{k \neq i}{=} A_{k,l} \overset{k = i}{=} A_{i,l} + \lambda\ A_{j,\,l}$$

Elementare Spaltenumformungen (ESU)

Obige Matrizen sind invertierbar !

...

$$A_{m \times n} \overset{\text{EZU}}{\to} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Spaltenvertauschen muss man zulassen !

$$\begin{matrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & \\ a_{2,1} & & & \vec{z}_m - \frac{a_{m\,1}}{a_{1\,1}} \cdot z_1 \\ \vdots & & & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & \end{matrix}$$

Zeilenrang = maximal Anzahl linear unabhängiger Zeilen.

EZU + Spaltenvertauschen ändern die Lösbarkeit des LGS nicht.

Vektorraum: $\{\vec{x} : A\,\vec{x} = 0\}$ ist nach Definition der Kern von A

Dim Kern(A) = $n - Rg\ A$

n-r verschiedene n-Tupel als einzige linearunabhängige Lösungen des LGS

$$\begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ r \\ r+1 \\ r+2 \\ \vdots \\ n \end{matrix} \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Weitergehende elementare Spaltenumformungen verändern das Gleichungssystem !!!

Bei der Multiplikation einer Matrix mit einer invertierbaren Matrix verändert sich ihr Rang nicht.

A:PAQ $\Rightarrow$ PQ-Form der Matrix

Spaltenrang = Zeilenrang

[19.05.2000]

$A_{m \times n}$

Elementarmatrizen, EZU:

1) $\vec{z}_i \to \vec{z}_i$; $A \to A' = EA$

2) $\vec{z}_i \to \alpha\ \vec{z}_i$

3) $\vec{z}_i = \vec{z}_i + \alpha \cdot \vec{z}_j$

Ebenso bei ESU (elementare Spaltenumformungen): $A \to A' = A \cdot \underset{n \times n}{E}$

Einheitsmatrizen: quadratisch, invertierbar,

HLGS (homogenes lineares Gleichungssystem) $A\,\vec{x} = 0$; $n -$ Zeilenrang $A = \dim\left(\text{Kern}\ A\right)$

Spaltenrang = maximale Anzahl linear unabhängiger Spalten; Spaltenrang = Zeilenrang; Kern $A = \{\vec{x} : A\,\vec{x} = 0\}$;

r_s : linear unabhängige Spalten

Wenn man einen Vektor findet, der sich nicht als LK der anderen l.u. Vektoren darstellen lässt, erhöht sich die Dimension

HLGS: $x_1 + \vec{s}_1 + \ldots + x_{r_s} \, \vec{s}_{r_s} + \ldots + x_n \, \vec{s}_n = 0$;

[...] wir wissen jetzt dass $\dim(\text{Kern } A) = n - r_z \geq n - r_s$

$\vec{x} \in \text{Kern } \vec{A}$;

[...]

$A_{m \times n}$ $\text{Kern } A = \{\vec{x} : A \, \vec{x} = 0\}$

Satz 1: Bei einer Matrix ist Zeilenrang = Spaltenrang = r
$\dim(\text{Kern } A) = n - r$

Kern: Die Menge aller Vektoren, die das HLGS lösen (sie bilden einen Vektorraum).

Satz 2: Existieren invertierbare Matrizen $P_{m \times m}, Q_{n \times n} : P \, A \, Q = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & q \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

was immer das auch heißen mag

Satz 3: Quadratische Matrizen: $\text{Rang } A = n \Leftrightarrow$ A invertierbar

2. Determinanten

2×2: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = A$

$\text{Rg} < 2 : a_{11} \, a_{22} - a_{12} \, a_{21} = 0$

$a_{11} \, a_{22} - a_{12} \, a_{21} \overset{\text{def}}{=} \det \text{A} <> 0$

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$(1) \; a_{11} \, b_{11} + a_{12} \, b_{21} = 1$

$(2) \; a_{11} \, b_{12} + a_{12} \, b_{22} = 0$

$(3) \; a_{21} \, b_{11} + a_{22} \, b_{21} = 0$

$(4) \; a_{21} \, b_{12} + a_{22} \, b_{22} = 1$

$(1) \, a_{22} - (3) \, a_{12} : \quad (a_{11} \, a_{22} - a_{12} \, a_{21}) \, b_{11} = a_{22}$

$(4) \, a_{11} - (2) \, a_{21} : \quad (a_{11} \, a_{22} - a_{12} \, a_{21}) \, b_{22} = a_{11}$

$(2) \, a_{22} - (4) \, a_{12} : \quad (a_{11} \, a_{22} - a_{12} \, a_{21}) \, b_{12} = -a_{12}$

$(3) \, a_{11} - (1) \, a_{21} : \quad (a_{11} \, a_{22} - a_{12} \, a_{21}) \, b_{21} = -a_{21}$

$$B = A^{-1} = \frac{1}{\text{det A}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

Probe: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} = \det\ A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

A: quadratische Matrix: n x n

$$n = 1: \quad \det\ A = a_{11}$$

$$n \geq 2: \quad det\ A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1}\ a_{1i} \det\ A_{1i}$$

$A_{1i}\ (n-1) \times (n-i)$ Matrix ≡ A ohne 1. Zeile, i-te Spalte

[...]

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\det\ A = a_{11}\,(a_{22}\,a_{33} - a_{23}\,a_{32}) - a_{12}\,(a_{21}\,a_{33} - a_{23}\,a_{31}) + a_{13}\,(a_{21}\,a_{32} - a_{22}\,a_{31}) =$$
$$= a_{11}\,a_{22}\,a_{33} - a_{11}\,a_{23}\,a_{32} - a_{12}\,a_{21}\,a_{33} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32} - a_{13}\,a_{22}\,a_{31}$$

Vorstellung: Matrix als Schachbrett (hier: 3x3-Schachbrett); immer 3 Türme auf das Schachbrett stellen, dass keiner den anderen schlagen kann entspricht jedem Determinanten-Summanden

3! Möglichkeiten, 3 Zeilenindices auf 3 Zeilen zu verteilen

$$\boxed{\det\ A = \sum_{P} (-1)^{P} \prod_{i=1}^{n} a_{i\,P\,(i)}\ ;}$$

$P\,(i)$: Permutation der Spaltenindices

Permutationen

3x3-Matrix: $3\,! = 6$ Permutationen, Determinante ist Summe von 1 bis 6 des Produkts der Spaltenelemente von 1 bis 3

Jede Permutation kann man zerlegen in eine Anzahl von Folgen, bei denen nur jeweils 2 Elemente vertauscht sind (und sogar bei denen nur jeweils 2 benachbarte Elemente vertauscht sind); Beispiel:
1, 2, 3, 4, 5
2, 1, 3, 4, 5
2, 1, 4, 3, 5
2, 1, 4, 5, 3 usw.

Die Reihenfolge der Vertauschungen ist also egal und nicht eindeutig. Aber ob man eine gerade oder ungerade Anzahl an Vertauschungen braucht, ist eindeutig. Man sagt also: Der Grad der Permutation ist gerade/ungerade, wenn die Anzahl der nötigen Vertauschungen eine gerade/ungerade Zahl ist.

Definition: $(-1)^P = \begin{cases} +1 & \text{für gerade Permutationen} \\ -1 & \text{für ungerade Permutationen} \end{cases}$

Bei der Determinante: ist es eine gerade Permutation, dann muss ein Plus vor den Summanden, ansonsten ein Minus (Spaltennummer!). Beispiel: $a_{11}\, a_{23}\, a_{32}$ hat als Spaltennummern 1-3-2, dafür braucht man eine Vertauschung, um dies aus 1-2-3 zu erzeugen; eins ist ungerade, also ein Minus.

$\det\ A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1}\, a_{1i} \det\ A_{1i}$: Entwicklung nach der ersten Zeile

$\det\ A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1}\, a_{i1} \det\ A_{i1}$: Entwicklung nach der ersten Spalte

Man kann auch nach anderen Zeilen oder Spalten entwickeln:

$\det\ A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i-j}\, a_{ij} \det\ A_{ij}$;

Eigenschaften von det A

1. $\det\ A$ ist in jeder Zeile und jeder Spalte **linear**.

D.h. $$\det \begin{pmatrix} \vec{z}_1 \\ \vdots \\ \vec{a} + \vec{b} \\ \vdots \\ \vec{z}_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \vec{z}_1 \\ \vdots \\ \vec{a} \\ \vdots \\ \vec{z}_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \vec{z}_1 \\ \vdots \\ \vec{b} \\ \vdots \\ \vec{z}_n \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} \vec{z}_1 \\ \vdots \\ \alpha\ \vec{z}_i \\ \vdots \\ \vec{z}_n \end{pmatrix} = \alpha \cdot \det \begin{pmatrix} \vec{z}_1 \\ \vdots \\ \vec{z}_i \\ \vdots \\ \vec{z}_n \end{pmatrix} ;$$

ebenso für Matrizen mit Spaltenvektoren: $\det\ (\vec{s}_1 , \ldots , \alpha\ \vec{s}_i , \ldots , \vec{s}_n) = \alpha \det\ (\vec{s}_1 , \ldots , \vec{s}_i , \ldots , \vec{s}_n)$

2. Antisymmetrie (bei Zeilen- und Spaltenvertauschung)

$$\det \begin{pmatrix} \vec{z}_1 \\ \vdots \\ \vec{z}_i \\ \vdots \\ \vec{z}_j \\ \vdots \\ \vec{z}_n \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} \vec{z}_1 \\ \vdots \\ \vec{z}_j \\ \vdots \\ \vec{z}_i \\ \vdots \\ \vec{z}_n \end{pmatrix} ;$$

Ebenso bei Spaltenvertauschungen: das Vorzeichen dreht sich um! Siehe oben, Permutationen.

3. Eine Zeile oder Spalte $\equiv 0 \;\Rightarrow\; \det = 0$

4. Zwei Zeilen oder zwei Spalten sind gleich $\Rightarrow\; \det = 0$

5. $\det\ A^T = \det\ A$

[02.06.2000]

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} a_{1j} \det A_{1j} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} a_{i1} \det A_{i1} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i-j} a_{ij} \det A_{ij} =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-j} a_{ij} \det A_{ij} = \sum_{P} (-1)^{P} \prod_{i=1}^{n} a_{i\,P(i)} = \sum_{P} (-1)^{P} \prod_{j=1}^{n} a_{P(j)\,j} ;$$

EZU:

1) Vertauschung: $\det A \to -\det A$

2) Multiplikation mit $\alpha \neq 0$ $\to \det A = \alpha \cdot \det A$

3) $\vec{z}_i \to \vec{z}_i + \alpha \cdot \vec{z}_j$ Determinante bleibt unverändert

Beweis: $\begin{pmatrix} \vec{z}_1 \\ \vdots \\ \vec{z}_i + \alpha \cdot \vec{z}_j \\ \vdots \\ \vec{z}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{z}_1 \\ \vdots \\ \vec{z}_i \\ \vdots \\ \vec{z}_n \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} \vec{z}_1 \\ \vdots \\ \vec{z}_j \\ \vdots \\ \vec{z}_n \end{pmatrix} ;$

der zweite Summand hat zweimal den Zeilenvektor $\vec{z}_j$ und hat daher als Determinante 0.

Ebenso bei ESU.

Satz 4: A invertierbar $\Leftrightarrow \det A \neq 0$; $\det (A\ B) = (\det A) \cdot (\det B)$;

Beweis: $P\ A\ Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ;$

P und Q sind invertierbar; die Anzahl der 1er ist der Rang von A;
Ist also A invertierbar, ist sein Rang gleich n, und die Determinante der dann entstandenen Einheitsmatrix ist 1; ansonsten ist die Determinante 0.

Beweis: Elementarmatrix zur Vertauschung von zwei Zeilen:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 1 & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(also hier sind gegenüber der Einheitsmatrix zwei Zeilen vertauscht) $\Rightarrow \det E = -1$;
Wenn man diese Elemantarmatrix mit einer beliebigen Matrix multipliziert, werden zwei Zeilen vertauscht, also ist die Determinante des Matrixprodukts (-1) mal der urspr. Determinante.
$\det (E \cdot B) = \det B \cdot \det E$;
Angenommen, A ist invertierbar, dann ist A ein endliches Produkt von Elementarmatrizen. Nun kann man die Elementarmatrix-Faktoren zusammenfassen, s.o.
Sei A nicht invertierbar, dann ist seine Determinante 0 ...

Folgerungen:

- $\det(AB) = \det(BA)$; $\det(A_1 \cdot \ldots \cdot A_a) = \prod_{i=1}^{a} \det A_i$;
- $\det(-A) = (-1)^n \det A$; (ausprobieren mit Einheitsmatrix mal (-1), also alle Diagonalelemente -1)
- $\det(A^k) = (\det A)^k$ für $k \in \mathbb{N}$; wenn $A^0 := \text{Einheitsmatrix}$, dann gilt das auch dafür.
- Kästchenregel: $\underset{n \times n}{A} = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$ mit Teilmatrizen: $\underset{n_1 \times n_1}{B}$, $\underset{n_2 \times n_2}{D}$, $\underset{n_1 \times n_2}{C}$;
  $\Rightarrow \det A = (\det B) \cdot (\det D)$;

[09.06.2000]

Cramersche Regel: $A\vec{x} = \vec{b}$, $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$; $A = (\vec{s}_1, \vec{s}_2, \ldots, \vec{s}_n)$;

i-te Komponente von $\vec{x}$: $x_i = \dfrac{\det(\vec{s}_1, \ldots, \vec{s}_{i-1}, \vec{b}, \vec{s}_{i+1}, \ldots, \vec{s}_n)}{\det A}$;

Beweis: $b_i = a_{n1} x_1 + \ldots + a_{nn} x_n$;

$$\det(\vec{s}_1, \ldots, \vec{s}_{i-1}, \vec{b}, \vec{s}_{i+1}, \ldots, \vec{s}_n) = \det\left(\vec{s}_1, \ldots, \sum_{j=1}^{n} x_j \vec{s}_j, \ldots, \vec{s}_n\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} x_i \det(\vec{s}_1, \ldots, \vec{s}_{i-1}, \vec{s}_j, \vec{s}_{i+1}, \ldots, \vec{s}_n) = x_i \det A;$$

Explizite Formel für A^{-1}: $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}(b_{ij})$, $\quad b_{ij} = (-1)^{j-i} \det A_{ji}$;

$A^{-1} = (\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_n)$; $A A^{-1} = (A\vec{c}_1, A\vec{c}_2, \ldots, A\vec{c}_n) = \text{Einheitsmatrix} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$;

$$\vec{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ i. Zeile};$$

$A\vec{c}_i = \vec{e}_i$; $(\vec{c}_i)_j = \dfrac{\det(\vec{s}_1, \vec{s}_2, \ldots, \vec{s}_{j-1}, \vec{e}_i, \vec{s}_{j+1}, \ldots, \vec{s}_n)}{\det A}$;

Ergebnis: in der Spalte j ist überall 0, außer das Element in der Zeile i: dieses ist 1.

Das Kreuzprodukt

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} = -(\vec{b} \times \vec{a}) =$$

$$= \vec{e}_x \left(a_y\, b_z - a_z\, b_y \right) - \vec{e}_y \left(a_x\, b_z - a_z\, b_x \right) + \vec{e}_z \left(a_x\, b_y - a_y\, b_x \right) = \det \begin{pmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{pmatrix};$$

Merkregel: immer x-y-z durchzählen; in der x-Spalte kommen die Komponenten y und z, in der y Spalte die Komponenten z und x usw.

$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin \vartheta;$$

Die Richtung ist senkrecht zu der aus den beiden Vektoren gebildeten Ebene. Merkregel: Wenn man eine Schraube vom ersten Vektor auf dem kürzesten Weg auf den zweiten Vektor dreht, dann zeigt das Kreuzprodukt in die Richtung, in die sich die Schraube dreht („rein“ oder „raus“).

$\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z,\ \vec{e}_y \times \vec{e}_z = \vec{e}_x,\ \vec{e}_z \times \vec{e}_x = \vec{e}_y$; (ebenfalls zyklisch x-y-z durchlaufen!)

Das Skalarprodukt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x\, b_x + a_y\, b_y + a_z\, b_z = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos \vartheta;$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2};$$

Was ist ein Skalar? Eine Größe, die sich nicht ändert, wenn das Koordinatensystem sich ändert (ein Vektor ändert sich dabei sehr wohl).

Für einen Mathematiker ist ein Vektor etwas, was die Vektor-Axiome erfüllt; für einen Physiker ist eher wichtig, wie er sich verhält in verschiedenen Koordinatensystemen.

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)^2 = |\vec{a}|^2 \cdot \left|\vec{b}\right|^2 - \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)^2 = |\vec{a}|^2 \cdot \left|\vec{b}\right|^2 \cdot \left(1 - \cos^2 \vartheta\right) = |\vec{a}|^2 \cdot \left|\vec{b}\right|^2 \cdot \sin^2 \vartheta;$$

Das Parallelepiped bzw. Parallelflach bzw. Spat, das von drei Vektoren aufgespannt wird, hat das Volumen:

$$V = \left|\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right]\right| = \left|\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)\right|;$$

Grund: Die Grundfläche (das Paralellogramm aus $\vec{b}$ und $\vec{c}$) hat als Fläche $\left|\vec{b} \times \vec{c}\right|$, die Höhe beträgt $\left|\vec{a}_{\vec{b} \times \vec{c}}\right|$ (also die Komponente von $\vec{a}$, die in Richtung des Kreuzprodukts der anderen beiden zeigt.

$$\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = a_x \left(b_y\, c_z - b_z\, c_y \right) - a_y \left(b_x\, c_z - b_z\, c_x \right) + a_z \left(b_x\, c_y - b_y\, c_x \right) = \det \begin{pmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{pmatrix};$$

Die Fläche eines Dreiecks ist $\frac{1}{2}\, \text{Grundlinie} \cdot \text{Höhe}$, das Volumen eines pyramidenartigen Körpers $\frac{1}{3}\, \text{Grundfläche} \cdot \text{Höhe}$;

Entsprechendes gilt für höherdimensionale Räume: wenn man z.B. im siebendimensionalen Raum bei einem sechsdimensionales Objekt einen Punkt außerhalb mit allen „Ecken“ verbindet, entsteht eine siebendimensionale Verallgemeinerung einer Pyramide, dort gilt entsprechend für das „Volumen“: $\frac{1}{7}\, \text{Grundfläche} \cdot \text{Höhe}$ („Grundfläche“ nicht als Fläche, sondern als etwas sechsdimensionales zu verstehen).

Volumen eines Tetraeders: Grundfläche ist ein halbes Paralellogramm $V = \frac{1}{3} \frac{1}{2} V(\text{Spat}) = \frac{1}{6} V(\text{Spat})$.

[16.06.2000]

3. Lineare Abbildungen

Abbildung = map
Menge = set

A, B beliebige Mengen

f Abbildung

$f : A \rightarrow B$ mapping f from A into b

A: domain (Definitionsmenge)
B: image, co-domain (Bild)

$p \in A$ p is an element of the set A

Die Teilmenge $\{(a, f(a)), a \in A\}$ $A \times B$ nennt man den **Graph** von f.

$f : A \rightarrow B$, $g : A \rightarrow B$;
Es gilt: $f = g$, wenn $f(a) = g(a) \quad \forall\ a \in A$

Negation: $f \neq g$, wenn $\exists\ a : f(a) \neq f(g)$

Venn-Diagramme (Mengen A und B, Pfeile von Elementen der Menge A zu Elementen der Menge B)

Was ist eine Abbildung?

- jedes Element der Definitionsmenge wird abgebildet
- ein Element der Definitionsmenge wird auf genau ein Element der Bildmenge abgebildet, nicht auf mehrere
- es können durchaus mehrere Elemente der Definitionsmenge auf das selbe Element der Bildmenge abgebildet werden

Körper = field

[„Wow, die Braut hat einen geilen field“]

Lineare Abbildungen:

Vektorraum-Homomorphismus = Vector Space Homomorphism

Es muss gelten (Körperaxiome):

1. Vektoraddition: $f(v) + f(w) = f(v + w) \quad v, w \in V$
2. Skalarmultiplikation: $k\ f(v) = f(k\ v) \quad v \in V,\ k \in \mathbb{R}$

Der MVV-Plan z.B. ist keine lineare Abbildung, weil Strecken und Winkel nicht im richtigen Verhältnis abgebildet werden; ein Stadtplan dagegen schon.

$\vec{x} \rightarrow A\,\vec{x} \quad x \in \mathbb{R}^n$; A ist $n \times n$-Matrix;
$A(x + y) = A\,x + A\,y$; $A(k\,x) = k\,A\,x$;

Nullabbildung:
$0(V) := 0;\ 0(w+v) = 0 = 0 + 0 = 0(w) + 0(v);\ 0(\alpha u) = 0 = \alpha\, 0 = \alpha\, 0(u)$

identische Abbildung: $Id : v \to v$
$Id(a\, v + b\, w) = a\, v + b\, w = a\ Id(v) + b\ Id(w);$

$p_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R};\ \ p_i(\vec{x}) = x_i;$
$p_i(u+v) = p_i(u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n) = p_i(u) + p_i(v)$; ebenso Skalarmultiplikation

$t_a(v) \to v + a \qquad a \neq 0$ ist keine lineare Abbildung, weil: $t_a(0) = 0 + a \neq 0$

Differenzialoperator: $D : V \to V$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, t}(u+v) = \frac{\mathrm{d}\, u}{\mathrm{d}\, t} + \frac{\mathrm{d}\, v}{\mathrm{d}\, t}$, also $D(u+v) = D\, u + D\, v;$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, t}(k\, u) = k\frac{\mathrm{d}\, u}{\mathrm{d}\, t}$, also $D(k\, u) = k\ D\ u;$

Integral: $f \to \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\, x$

$f(u+v) = \int_a^b (u(t)\, v(t))\,\mathrm{d}\, t = \int_a^b u(t)\,\mathrm{d}\, t + \int_a^b v(t)\,\mathrm{d}\, t = f(u) + f(v)$
ebenso Skalarmultiplikation

Verknüpfung: $f : v \to w,\ g : u \to v;\ \ f \circ g : u \to w;\ \ f \circ g(u) = f(g(u));$

Volumen:

3-Spat = parallelepiped

$V_s = \left|\det\left(f(b_1), f(b_2), \dots, f(b_n)\right)\right| = \left|\det\left(F\ b_1, F\ b_2, \dots, F\ b_n\right)\right| =$
$= \left|\det F\ \left(b_1, b_2, \dots, b_n\right)\right| = \left|\det F\ \det\left(b_1, b_2, \dots, b_n\right)\right| = \left|\det F\right| \left|\det\left(b_1, b_2, \dots, b_n\right)\right| = |\det$
;
$\Rightarrow\ \left|\det F\right| = 1$

[23.06.2000]

Eine Abbildung ist linear, wenn:
$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2);$
$f(\alpha\, x) = \alpha\ f(x);$

$f : V \to W;\ \ \vec{v} \in V \to \vec{f}(\vec{v}) = \vec{w} \in W;$

$\vec{f}(\vec{v}_1 + \alpha\, \vec{v}_2) = \vec{f}(\vec{v}_1) + \alpha \cdot \vec{f}(\vec{v}_2);$
z.B. $\vec{f}(\vec{v}) = \vec{0};\ \ \vec{f}(\vec{v}) = \vec{v} \qquad \forall\ \vec{v} \in V;$

Nicht linear: $\vec{f}(\vec{v}) = \vec{v} + \vec{a}$!

$\vec{f}(\vec{0}) = \vec{0};$

V ist n-dimensional $\Rightarrow$ es existiert eine Basis $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n;\ \ \vec{v} = v_1\, \vec{a}_1 + \dots + v_n\, \vec{a}_n;$

Satz 6: V endlichdimensional (n-dimensional) $\Rightarrow$ jede lineare Abbildung von V in sich lässt sich als Multiplikation der Komponenten n-tupel mit einer $n \times n$ -Matrix darstellen.

Beweis: Sei also $\vec{a}_1 , \ldots , \vec{a}_n$ Basis von V. $\vec{f}\,(\vec{a}_1) = \vec{b}_1 = \sum_{j=1}^{n} F_{1j}\, \vec{a}_j$, $\vec{f}\,(\vec{a}_i) = \vec{b}_i = \sum_{j=1}^{n} F_{ij}\, \vec{a}_j$;

$\vec{v} \in V : \vec{v} = v_1\, \vec{a}_1 + \ldots + v_n\, \vec{a}_n$;

$$\vec{f}\,(\vec{v}) = \sum_{i=1}^{n} v_i\, \vec{f}\,(\vec{a}_i) = \sum_{i\,0\,1}^{n} v_i \sum_{j=1}^{n} F_{ij}\, \vec{a}_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} v_i\, F_{ij} \right) \vec{a}_j = \sum_{j=1}^{n} w_j\, \vec{a}_j ;$$

$$w_j = \sum_{i=1}^{n} v_i\, F_{ij} ; \quad (w_i) = (v_i)\,(F_{ij}) ;$$

i-te Zeile von F: Komponenten von $\vec{f}\,(\vec{a}_i)$;

$\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = F^T \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$, F^T hat in der j-ten Spalte Komponenten von $\vec{f}\,(\vec{a}_j)$.

Vgl. $f\,(x) = m \cdot x$;

Umkehrung: $\vec{f} : \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \to \underset{n \times n}{F} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$, F fest (F ist eine Matrix);

$$\underset{n \times n}{F} \left(\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}_{n \times 1} + \alpha \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}_{n \times 1} \right) = F \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \alpha\, F \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} ;$$

Beispiel: $\vec{f}\,(\vec{v}) = \vec{0} \quad \forall\, \vec{v} : \; F = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$;

Beispiel: $\vec{f}\,(\vec{v}) = \vec{v} \quad \forall\, \vec{v} : \; F = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ Einheitsmatrix;

Beispiel: Projektion auf Komponente i: $F = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ (i-te Zeile)

$V = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,,\, \infty \text{-oft differenzierbar} \right\}$ Menge der unendlich oft differenzierbaren Funktionen

Dieser Vektorraum ist sehr groß, aber nicht unendlich groß, weil man nicht jede Funktion als unendlich oft differenzierbare Funktion darstellen kann.

$\vec{d} : f \to \dfrac{\mathrm{d}\, f}{\mathrm{d}\, x}$;

$$I : V \to \mathbb{R} ; \; f \to \int_{-1}^{+1} f(x) \, \mathrm{d}\, x ;$$

$$\vec{K} : f(x) \to \int_{-\infty}^{+\infty} K(x, x') \, f(x') \, \mathrm{d}\, x' ;$$

$$\vec{f}(V) = \left\{ \vec{f}(\vec{f}) , \vec{v} \in V \right\} \subset W ;$$

Der Bildraum kann natürlich keine größere Dimension als der Urbildraum haben.

V endlichdimensional: $\vec{a}_1 , \ldots , \vec{a}_n$; $\vec{b}_i = \vec{f}(\vec{a}_i)$, $\vec{f}(V) = \left\langle \vec{b}_1 , \ldots , \vec{b}_n \right\rangle$ lineare Hülle

$\dim \left(\vec{f}(V) \right) = \text{Rang } F_{n \times n}$; $\vec{f} : (v_i) \to F(v_i)$;

Skalarprodukt (und Metrik)

$\mathbb{R}^n : \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \, b_1 + a_2 \, b_2 + \ldots + a_n \, b_n$;

Eigenschaften:

- $\vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0$ ($\vec{a} \cdot \vec{a} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$), $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$; Norm oder Länge: $d(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a} - \vec{b}|$;
- Kommutativ: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;
- Linear: $\vec{a} \left(\vec{b}_1 + \alpha \, \vec{b}_2 \right) = \vec{a} \cdot \vec{b}_1 + \alpha \cdot \vec{a} \cdot \vec{b}_2$; $\Rightarrow |\alpha \, \vec{a}| = |\alpha| \, |\vec{a}|$;

Cauchy-Schwarzsche Ungleichung (CSU): $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$;
Dreiecksungleichung (D-U): $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$;

Skalarprodukt allgemein: $(V \times V) \to \mathbb{R}$; $(\vec{v}_a , \vec{v}_2) \to \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$; obige Eigenschaften gelten.

Beweis der CSU:

$$0 \leq \left(\vec{a} - \beta \, \vec{b} \right) \cdot \left(\vec{a} - \beta \, \vec{b} \right) = \vec{a} \cdot \vec{a} - 2 \, \beta \, (\vec{a} \cdot \vec{b}) + \beta^2 \cdot \vec{b} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{a} - 2 \, \frac{\left(\vec{a} \cdot \vec{b} \right)^2}{|\vec{b}|^2} + \frac{\left(\vec{a} \cdot \vec{b} \right)^2}{|\vec{b}|^2} = |\vec{a}|^2 - \frac{(\vec{a}}{|\vec{l}}$$

;

(Es gilt: $\beta = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2}$ mit $\vec{b} \neq 0$, andernfalls trivial)

Daraus folgt: $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$;

Beweis der Dreiecksungleichung:

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} + 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} \leq |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2 \, |\vec{a}| \, |\vec{b}| = \left(|\vec{a}| + |\vec{b}| \right)^2 ;$$

Definition: $\dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} =: \cos(\vec{a} , \vec{b})$ (weil dieser Term $\in [-1 , 1]$).

Daraus kann man noch den Winkel definieren:

Definition: $\sphericalangle(\vec{a} , \vec{b}) := \arccos \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$;

Definition: $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind **orthogonal** $\Leftrightarrow$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Bemerkung: *Das gilt unabhängig von der Dimension. Wenn das erfüllt ist, nennt man Vektoren orthogonal in jeder Dimension.*

Definition: $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind **orthonormal** $\Leftrightarrow$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \ \wedge \ |\vec{a}| = 1 , |\vec{b}| = 1$.

Definition: Die Basis $\vec{a}_1 , \ldots , \vec{a}_n$ heißt **orthogonal** bzw. **orthonormal**, wenn die $\vec{a}_i$ paarweise diese Eigenschaft haben.

Orthonormale Basis: $\vec{a}_1 , \ldots , \vec{a}_n$;

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \, \vec{a}_i , \ \vec{w} = \sum_{i=1}^{n} w_i \, \vec{a}_i ; \ \vec{v} \cdot \vec{w} = \left(\sum_{i=1}^{n} v_i \, \vec{a}_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} w_j \, \vec{a}_j \right) = \sum_{i,j} v_i \, w_j \left(\vec{a}_i , \vec{a}_j \right) ;$$

Schmidtsche Orthonormalisierung:

$$\vec{b}_1 = \frac{\vec{a}_1}{|\vec{a}_1|} , \ \vec{b'}_2 = \vec{a}_2 - \left(\vec{a}_2 \cdot \vec{b}_1 \right) \vec{b}_1 ; \ \vec{b}_2 = \frac{\vec{b'}_2}{|\vec{b'}_2|} ;$$

$$\Rightarrow \left(\vec{b'}_2 \cdot \vec{b}_1 \right) = \left(\vec{b}_1 \cdot \vec{a}_2 \right) - \left(\vec{a}_2 \cdot \vec{b}_1 \right) = 0 ;$$

$$\vec{b'}_{m+1} = \vec{a}_{m+1} - \left(\vec{a}_{m+1} \, \vec{b}_1 \right) \vec{b}_1 - \ldots - \left(\vec{a}_{m+1} \cdot \vec{b}_m \right) \vec{b}_m ; \ \vec{b}_{m+1} = \frac{\vec{b'}_{m+1}}{|\vec{b'}_{m+1}|} ;$$

[30.06.2000]

Orthogonalität

$\vec{f}$ orthogonal: $\vec{f}\,(\vec{a}) \cdot \vec{f}\,(\vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b}$;

Eine Menge von paarweise orthogonalen Vektoren ist linear unabhängig.

Satz 7: $\vec{f}$ sei lineare Abbildung $\vec{V} \to \vec{V}$, und F die zugehörige Abbildungsmatrix in Bezug auf Orthonormalbasis, dann gilt:
$\vec{f}$ orthogonal $\Leftrightarrow$ $F^T \, F = F \, F^T = 1$ Einheitsmatrix .

Beweis:

$$\Rightarrow \quad \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \, \vec{a}_i , \ \vec{w} = \sum_{i=1}^{n} w_i \, \vec{a}_i ;$$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \sum_{i=1}^{n} v_i \sum_{j=1}^{n} w_j \underbrace{\vec{a}_i \cdot \vec{a}_i}_{= \delta_{ij}} = \sum_{i=1}^{n} v_i \cdot w_i = \left(v_1 , \ldots , v_n \right) \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} ;$$

$$\vec{f}\,(\vec{v}) \cdot \vec{f}\,(\vec{w}) = \left(v_1 , \ldots , v_n \right) F^T \ F \ F \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} ;$$

[...]

Mikrosätzchen: F ist orthogonale Matrix $\Rightarrow$ $|\det \ F| = 1$.

Umgekehrt gilt das nicht: $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Beispiele für orthogonale Abbildungen:

[Grafik]

Drehungen in der Ebene:
$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;
nach Drehung um den Winkel φ:
$\vec{f}(\vec{r}) = x \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$;

$\det F = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$; also eine orthogonale Matrix.

Zerlegung: $\vec{r} = \vec{r}_{\parallel} + \vec{\varrho}$;

$$\vec{f}(\vec{r}) = \cos\varphi \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \sin\varphi \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix};$$

[...]

Drehung um festen Vektor $\vec{a}$, $|\vec{a}| = 1$ in $\mathbb{R}^3$ um Winkel φ:

$\vec{r} = \vec{r}_{\vec{a}} + \vec{\varrho}$, $\vec{\varrho} = \vec{r} - (\vec{r}\cdot\vec{a})\,\vec{a}$; $\vec{\varrho}^{\,*} = \vec{a} \times \vec{\varrho}$; $\vec{r}_{\vec{a}} = (\vec{r}\cdot\vec{a})\,\vec{a}$;
$\vec{f}(\vec{r}) = (\cos\varphi)\,\vec{\varrho} + (\sin\varphi)\,\vec{\varrho}^{\,*} + \vec{r}_{\vec{a}} = (\vec{r}\cdot\vec{a})(1-\cos\varphi)\,\vec{a} + (\cos\varphi)\,\vec{r} + (\sin\varphi)\,\vec{a}\times\vec{r} =$

$$= (1-\cos\varphi) \begin{pmatrix} a_x^2\,x + a_x\,a_x\,y + a_x\,a_z\,z \\ a_y\,a_x\,x + a_y^3\,y + a_y\,a_z\,z \\ a_z\,a_x\,x + a_z\,a_y\,y + a_z^2\,z \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

mit

$$F = \begin{pmatrix} \cos\varphi + (1-\cos\varphi)\,a_x^2 & (1-\cos\varphi)\,a_x\,a_y - (\sin\varphi)\,a_z & (1-\cos\varphi)\,a_x\,a_z + (\sin \\ (1-\cos\varphi)\,a_y\,a_x + (\sin\varphi)\,a_z & \cos\varphi + (1-\cos\varphi)\,a_y^2 & (1-\cos\varphi)\,a_y\,a_z - (\sin \\ (1-\cos\varphi)\,a_z\,a_x - (\sin\varphi)\,a_y & (1-\cos\varphi)\,a_z\,a_y + (\sin\varphi)\,a_x & \cos\varphi + (1-\cos\varphi) \end{pmatrix}$$

$\vec{f}$, $\vec{g}$; $\vec{f}\cdot\vec{g}$;
$\vec{v} \to \vec{f}\,(\vec{g}\,(\vec{v}))$

Alle orthogonalen Abbildungen eines n-dimensionalen Vektorraums verknüpft durch Hintereinanderausführung: O(n) **orthogonale Gruppe**.

Eine **spezielle orthogonale Gruppe** ist eine orthogonale Gruppe mit $\det = 1$: SO(n).

z.B. SO(2): alle 2×2 -Matrizen $F^T = F^{-1}$, $\det F = 1$;

$$F = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix};\ F^{-1} = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix};\ F^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix};$$

daraus folgt: $a_{22} = a_{11}$ und $a_{12} = -a_{21}$

$$F = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \; a^2 + b^2 = 1 \text{, dann existiert } \varphi: \; a = \cos\varphi, \; b = \sin\varphi;$$

also ist SO(2) die Gruppe der Drehungen im $\mathbb{R}^2$, sie ist kommutativ.

SO(3): Gruppe der Drehungen im $\mathbb{R}^3$. Nicht kommutativ.

[14.07.2000]

Basiswechsel

$$(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) \to (\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n)$$

Alle neuen Basisvektoren kann man durch die alten Basisvektoren kombinieren:

$$\vec{b}_i = \sum_{j=1}^{n} S_{ij} \, \vec{a}_j \quad \text{(S ist eine Abbildungsmatrix)}$$

Jeden Vektor bezüglich der neuen Basis kann man als Linearkombination der neuen Basisvektoren schreiben:

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} v'_i \, \vec{b}_i;$$

Weil man die neuen Basisvektoren ebenfalls kombinieren kann (aus den alten), ergibt sich:

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} v'_i \sum_{j=1}^{n} S_{ij} \, \vec{a}_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\underbrace{\sum_{j=1}^{n} v'_i \, S_{ij}}_{v_j} \right) a_j;$$

Mit Abbildungsmatrizen:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = S^T \begin{pmatrix} v'_1 \\ \vdots \\ v'_n \end{pmatrix} \text{, und umgekehrt: } \begin{pmatrix} v'_1 \\ \vdots \\ v'_n \end{pmatrix} = \underbrace{(S^T)^{-1}}_{\tilde{S}} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix};$$

$$\vec{v} \xrightarrow{\vec{f}} \vec{w}: \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}; \; \begin{pmatrix} w'_1 \\ \vdots \\ w'_n \end{pmatrix} = F' \begin{pmatrix} v'_1 \\ \vdots \\ v'_n \end{pmatrix}; \; \begin{pmatrix} v'_1 \\ \vdots \\ v'_n \end{pmatrix} = \tilde{S} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}; \; \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = S^T \begin{pmatrix} w'_1 \\ \vdots \\ w'_n \end{pmatrix};$$

Definition: F_1, F_2 heißen **ähnlich**, wenn eine invertierbare Matrix B existiert mit:
$F_2 = B^{-1} F_1 B$.

4. Eigenvektoren und Eigenwerte

$\vec{f}$: lineare Abbildung $V \to V$.

Definition: $\vec{v}$ heißt **Eigenvektor** (EV) (engl. eigenvector) der linearen Abbildung $\vec{f}$, wenn:
$\vec{v} \neq \vec{0}$ und es existiert eine Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$: $\vec{f}(\vec{v}) = \alpha \cdot \vec{v}$.

α heißt **Eigenwert** (EWT) (engl. eigenvalue)

Beispiele:

- $\vec{f}\,(\vec{v}) = \vec{0}$: alle $\vec{v}$ (Eigenwerte sind 0)
- $\vec{f}\,(\vec{v}) = \vec{v}$: alle $\vec{v}$ (Eigenwerte sind 1)
- $V = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ∞ -oft differenzierbar$\}$: $\vec{f} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}$; $x \to e^{\alpha\, x}$; $\vec{f}\,(e^{\alpha\, x}) = \alpha \cdot e^{\alpha\, x}$ ist also ein Eigenvektor mit dem Eigenwert α

Sätzchen: $\vec{v}_1 \ldots \vec{v}_n$ sind Eigenvektoren zum selben Eigenwert α , dann ist es auch jede Linearkombination.

$\vec{f}^{\,2} = \vec{f}\,(\underbrace{\vec{f}\,(\vec{v})}_{\alpha \cdot \vec{v}}) = \alpha^2\, \vec{v}$;

$F\,(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i\, x^i$; $F\,(\vec{f}) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i\, (\vec{f}\,)^i$; $F\,(\vec{f}\,)\,(\vec{v}) = \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i\, \alpha^i \right)}_{F\,(\alpha)} \vec{v}$;

$\Rightarrow$ $F\,(\vec{f}\,)\,(\vec{v}) = F\,(\alpha) \cdot \vec{v}$;

Satz 8: Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig.

Anschaulich: Die Abbildung entspricht einer Streckung. Haben Eigenvektoren verschiedene Eigenwerte, dann werden sie verschieden gestreckt, können daher nicht parallel sein (dann würden sie gleich gestreckt) und müssen deshalb linear unabhängig sein.

Angenommen, die Eigenvektoren sind linear abhängig: man kann den Nullvektor nichttrivial linear kombinieren, d.h. $c_1\, \vec{v}_1 + \ldots + c_n\, \vec{v}_n = \vec{0}$ (1);
$\vec{f}\,(\vec{0}) = c_1\, \alpha_1\, \vec{v}_1 + \ldots + c_n\, \alpha_n\, \vec{v}_n = \vec{0}$; davon jeweils $\alpha_1 \cdot (1)$ abziehen:
$c_1\, (\alpha_2 - \alpha_1)\, \vec{v}_2 + \ldots + c_n\, (\alpha_n - \alpha_1)\, \vec{v}_n = \vec{0}$; das Gleiche (die zweite Gl. abziehen):
$c_3\, (\alpha_3 - \alpha_1)\, (\alpha_3 - \alpha_2)\, \vec{v}_3 + \ldots + c_n\, (\alpha_n - \alpha_1)\, (\alpha_n - \alpha_2)\, \vec{v}_n = \vec{0}$; und so weiter... ergibt am Ende:
$c_n\, (\alpha_n - \alpha_1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_n - \alpha_{n-1})\, \vec{v}_n = \vec{0}$, daraus folgt: $c_n = 0$.
Analog dazu kann man zeigen, dass alle anderen c auch 0 sein müssen.

Definition: A $n \times n$ -Matrix, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$; $\vec{x}$ heißt **Eigenvektor** von A, wenn:
$\vec{x} \neq \vec{0}$, und es existiert $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $A\, \vec{x} = \alpha\, x$.
α heißt **Eigenwert** der Matrix A.

$\dim V = n$; angenommen, es gibt n linear unabhängige EV, dann kann man daraus eine Basis machen.

Die Abbildung dieser Basisvektoren sieht dann so aus:

$\vec{b}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$; $F\ \vec{b}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \alpha_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$; dann gilt für das k-te Element dieses Produkts: $F_{ki} = \delta_{ki} \cdot \alpha_i$;

dann ist die Abbildungsmatrix: $F = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}$;

Berechnung der Eigenwerte einer Matrix

$A\ \vec{x} = \lambda\ \vec{x} \quad \Leftrightarrow \quad (A - \lambda\ E)\ \vec{x} = 0$; dieses Gleichungssystem hat genau dann eine nichttriviale Lösung, wenn $\det\ (A - \lambda\ E) = 0$.

[21.07.2000]

Eigenvektoren zu verschiedenen EWten sind linear unabhängig.

im $\mathbb{R}^n$: wenn es n linear unabhängige EV von A gibt, dann gibt es

$$B : B^{-1}\ A\ B = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_n \end{pmatrix} ;$$

$$\det\ A = \prod_{i=1}^{n} \alpha_i ;$$

$A\ \vec{v} = \alpha\ \vec{v} \ \Rightarrow\ f\ (A)\ \vec{v} = f\ (\alpha)\ \vec{v}$; $A^{-1}\ \vec{v} = \frac{1}{\alpha}\ \vec{v}$;

$A\ \vec{x} = \alpha\ \vec{x} = \alpha\ E\ \vec{x}$; $(A - \alpha\ E)\ \vec{x} = \vec{0}$;

$\det\ (A - \alpha\ E) = 0$;
Basiswechsel: $\det\ (C^{-1}\ A\ C - \alpha\ E) = \det\ [C^{-1}\ (A - \alpha\ E)\ C] = \det\ (A - \alpha\ E)$;

Definition: Wenn α eine k-fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, dann heißt k **algebraische Vielfachheit** des Eigenwertes α .
(?) Wenn zu einem gegebenen Eigenwert α k Eigenvektoren gibt, dann heißt k **geometrische Vielfachheit**: $A\ (\vec{x}_1 + c\ \vec{x}_2) = \alpha\ (\vec{x}_1 + c\ \vec{x}_2)$

Satz 10: A (reelle) symmetrische $n \times n$ -Matrix:
(a) A hat n linear unabhängige Eigenvektoren (mit reellen Eigenwerten).
(b) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal.
(c) Es existiert eine orthogonale Matrix $O : O^{-1}\ A\ O$ diagonal.
(d) geometrische Vielfachheit = algebraische Vielfachheit
(e) Es gibt eine Orthonormalbasis von Eigenvektoren.

[...][Beweis des Satzes]

[28.07.2000]

Anwendung:

elektrostatisches Potenzial, Ladungsverteilung

$$\Phi(\vec{r}) = \sum_i \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|} \; ; \; |\vec{r}| \gg |\vec{r}_i| : \; \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_i|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2\,\vec{r}\,\vec{r}_i + r_i^2}} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{2\,\vec{r}\,\vec{r}_i}{r^2} + \frac{r_i^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}};$$

$$\left[(1+x)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \ldots\right] \text{ (aus Bronstein)}$$

$$= \frac{1}{r}\left(1 + \frac{\vec{r}\,\vec{r}_i}{r^2} - \frac{1}{2}\frac{r_i^2}{r^2} + \frac{3}{8}\,4\,\frac{(\vec{r}\,\vec{r}_i)^2}{r^4} + \ldots\right) = \frac{1}{r} + \frac{1}{r^3}(\vec{r}\,\vec{r}_i) + \frac{1}{2\,r^5}\left(3\,(\vec{r}\,\vec{r}_i)^2 - r^2\,r_i^2\right) \ldots$$

eingesetzt ein Potenzial: $Q = \sum_i q_i$ Gesamtladung; $\vec{d} = \sum_i q_i\,\vec{r}_i$ Dipolmoment

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}\left(\vec{r}\sum_i q_i\,\vec{r}_i\right) + \frac{1}{8\pi\varepsilon_0 r^5}\sum_i q_i\left[3\,(\vec{r}\,\vec{r}_i)^2 - (r^2\,r_i^2)\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}(\vec{r}\,\vec{d})$$

$$+\frac{1}{8\pi\varepsilon_0 r^5}\underbrace{\left[x^2\,T_{xx} + y^2\,T_{yy} + z^2\,T_{zz} + x\,y\,T_{xy} + y\,x\,T_{yx} + y\,z\,T_{yz} + z\,y\,T_{zy} + z\,x\,T_{zx} + x\,z\,T\right.}_{=\vec{r}^T\,T\,\vec{r}}$$

$$+O\left(\frac{1}{r^4}\right)$$

$$T_{xx} = \sum_i q_i\,(2\,x_i^2 - y_i^2 - z_i)\,,\; T_{yy} = \sum_i q_i\,(2\,y_i^2 - z_i^2 - x_i^2)\,,\; T_{zz} = \sum_i q_i\,(2\,z_i^2 - x_i^2 - y_i^2)\,;$$

$$T_{xy} = \sum_i q_i\,3\,x_i\,y_i = T_{yx} \text{ usw.}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix}}_{=T}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$; T: Quadrupoltensor; T_i: Quadrupolmoment

> Jede orthogonale Transformation im $\mathbb{R}^3$ lässt sich darstellen als Drehungen und höchstens eine Spiegelung.

In einem geeigneten Koordinatensystem gilt:

$$B^{-1}\,T\,B = \tilde{T} = \begin{pmatrix} t_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & t_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & t_{zz} \end{pmatrix}$$

Die Spur einer Matrix ist gegenüber orthogonalen Transformationen invariant.