Ein Skript der Vorlesung

Mathematik für Physiker
Analysis

nach dem Buch „Analysis 2“ von Prof. Dr. Königsberger, Springer Verlag

Prof. Peter Vogl
TU München
2. Semester, SS 2000

Datum: 03.10.2000

von Michael Wack, Christoph Moder, Manuel Staebel

http://www.skriptweb.de

Hinweise (z.B. auf Fehler) bitte per eMail an uns: mail@skriptweb.de - Vielen Dank.

Inhaltsverzeichnis

1. Elemente der Topologie

1.1 Topologie des euklidischen Raumes $\mathbb{R}^n$

Im $\mathbb{R}^n$ ist die Verallgemeinerung des „Abstands“ die euklidische Norm.

Definition: Für Vektoren $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ ist die **euklidische Norm**:

$\|\vec{x}\| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$.

Sie erfüllt die Regeln:

1. $\|\vec{x}\| > 0$ für $\vec{x} \neq 0$
2. $\|\alpha\, \vec{x}\| = |\alpha| \cdot \|\vec{x}\| \quad \forall\ \alpha \in \mathbb{R}$
3. $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{x}\|$

Definition: Der Raum $\mathbb{R}^n$ zusammen mit der euklidischen Norm und dem euklidischen Abstand zweier Punkte $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$

$d(\vec{a}, \vec{b}) := \|\vec{a} - \vec{b}\|$,

der sogenannten **euklidischen Metrik**, heißt **euklidischer** $\mathbb{R}^n$.

Definition: Eine **offene Kugel** mit Mittelpunkt $\vec{a}$ und Radius $r > 0$ ist die Menge

$K_r(\vec{a}) := \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \middle| \|\vec{x} - \vec{a}| < r \right\}$.

Definition: Eine Folge $(\vec{x}_k) \in \mathbb{R}^n$ heißt **konvergent**, wenn $\exists\ \vec{a} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{x}_k - \vec{a}\| \to 0$ für $k \to \infty$.

Lemma: $(\vec{x}_k) \in \mathbb{R}^n$ konvergiert gegen $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{k \to \infty} x_{k_\nu} = a_\nu \qquad \nu = 1, \dots, n$.

Definition: Eine Folge $(\vec{x}_k) \in \mathbb{R}^n$ heißt **beschränkt**, wenn alle ihre Glieder in einer Kugel $K_r(0)$ mit gegebenem Radius r liegen.

Definition: Eine Folge $(\vec{x}_k)$ heißt **Cauchyfolge**, wenn für jedes

$\varepsilon > 0 \quad \exists\ N : \quad \|\vec{x}_k - \vec{x}_l\| < \varepsilon \qquad \forall\ k, l > N \in \mathbb{N}$.

Satz (Bolzano-Weierstraß): Im euklidischen $\mathbb{R}^n$ gilt:

(i) Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.

(ii) Jede Cauchyfolge konvergiert.

Beweis: Vollständige Induktion nach n, Verallgemeinerung des eindimensionalen Raumes.

Definition: Eine Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt **Umgebung** von $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$, wenn sie eine Kugel $K_\varepsilon(\vec{a})$, $\varepsilon > 0$, mit Mittelpunkt $\vec{a}$, enthält.

$K_\varepsilon(\vec{a})$ heißt ε-**Umgebung** oder **Kugelumgebung** von $\vec{a}$.

Definition: Eine Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt **offen**, wenn sie Umgebung eines jeden Punktes $\vec{a} \in U$ ist, d.h. wenn es $\forall\ \vec{a} \in U\ \exists$ Kugel $K_\varepsilon(\vec{a})$ mit $K_\varepsilon(\vec{a}) \subseteq U$.

Beispiel:

– Die leere Menge ist offen.

- Die offene Kugel $K_r(\vec{a})$ ist offen.
- $(a, b) \subset \mathbb{R}^1 \quad a, b \in \mathbb{R}$ sind offen.

Elementare Regeln:
(i) A, B seien offen $\Rightarrow A \cap B$ offen (nur endlich viele geschnitten!).
(ii) Die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist offen.

Beweis: Königsberger

Definition: Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt **abgeschlossen**, wenn ihr Komplement $A^C := \mathbb{R}^n \setminus A$ offen ist.

Beispiel: Jede abgeschlossene Kugel $\overline{K_r(\vec{b})} := \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \middle| \|\vec{x} - \vec{b}\| \leq r \right\}$ ist abgeschlossen.

Beweis: Ist $\vec{a} \notin \overline{K_r(\vec{b})} \Rightarrow K_\varepsilon(\vec{a})$ mit $\varepsilon < \|\vec{b} - \vec{a}\| - r$ liegt ebenfalls außerhalb von $\overline{K_r(\vec{b})}$.

Beispiel: Die Menge $\left\{ \frac{1}{n} \middle| n \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{R}$ ist weder offen noch abgeschlossen.

Elementare Regeln:
(i) A, B seien abgeschlossen $\Rightarrow A \cup B$ abgeschlossen (nur endlich viele vereinigt!).
(ii) Der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

Satz: Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist abgeschlossen $\Leftrightarrow$ der Grenzwert jeder in $\mathbb{R}^n$ konvergenten Folge $(\vec{a}_k)$ mit $\vec{a}_k \in A \quad \forall\, k$ liegt in A.

Beweis:
$\Rightarrow$ Beweis durch Widerspruch:
$A \subset \mathbb{R}^n$, der Grenzwert $\vec{a}$ von $(\vec{a}_k) \in A$ liege in $U := \mathbb{R}^n \setminus A$. Dann enthielte die offene Menge U als Umgebung von $\vec{a}$ fast alle $\vec{a}_k$. WIDERSPRUCH!
$\Leftarrow$ Beweis durch Widerspruch:
Sei A offen, d.h. $U := \mathbb{R}^n \setminus A$ abgeschlossen. Dann gibt es einen Punkt $\vec{a} \in U$ derart, dass **keine** Kugel um $\vec{a}$ in U liegt. Insbesondere enthält jede Kugel $K_{\frac{1}{n}}(\vec{a})$, $n = 1, 2, \dots$ einen Punkt $\vec{a}_n$ mit $\vec{a}_n \notin U$. Die Folge $(\vec{a}_n)$ liegt in A und konvergiert $\|\vec{a}_n - \vec{a}\| < \frac{1}{n}$. Ihr Grenzwert $\vec{a}$ gehört jedoch nicht zu A. WIDERSPRUCH!

Definition: $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ heißt **Häufungspunkt** der Menge $M \subset \mathbb{R}^n$, wenn in jeder Umgebung um $\vec{x}$ unendlich viele Punkte von M liegen.
Die **Menge aller Häufungspunkte** von M bezeichnen wir mit $H(M)$.

Satz: Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist abgeschlossen $\Leftrightarrow$ A enthält alle ihre Häufungspunkte.

Beweis: Königsberger

1.2 Topologische Räume

Mengen mit bestimmten Umgebungsstrukturen

I. Normierte Räume. Metrische Räume.

Definition: Sei $\mathrm{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Eine **Norm** auf einem K-Vektorraum V ist eine Funktion $\|\,\| : V \to \mathbb{R}$, so dass gilt $\forall\ x\ ,\ y \in V \wedge \alpha \in \mathrm{K}$:

(N1) $\|0\| = 0$ und $\|x\| > 0$ für $x \neq 0$

(N2) $\|\alpha\, x\| = |\alpha|\, \|x\|$

(N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Das Paar $(V\ ,\ \|\,\|)$ heißt **normierter Raum**, oft schreibt man dafür nur V.

Beispiel:

1) K^n mit der sogenannten **p-Norm**:

$$\|\vec{x}\|_p := \left(\sum_{\nu=1}^{n} |x_\nu|^p\right)^{\frac{1}{p}} \text{ (p-Norm).}$$

Die Norm $p = 2$ heißt im Fall $\mathrm{K} = \mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}$ **euklidische Norm**.

2) K^n mit **Maximumsnorm**:

$$\|\vec{x}\|_\infty := \max\left\{|x_1|\ ,\ \ldots\ ,\ |x_n|\right\} \text{ (Maximumsnorm)}$$

Bemerkung: *Man zeigt wegen* $|x_\nu| \leq \|\vec{x}\|_\infty$ *leicht, dass*

$$\|\vec{x}\|_\infty = \lim_{p \to \infty} \|\vec{x}\|_p\ .$$

3) Der Raum $C[a\ ,\ b]$ der stetigen Funktionen auf $[a\ ,\ b]$ kann mit den Normen versehen werden:

$$\|f\|_p := \left(\int_a^b |f(x)^p|\ \mathrm{d}\ x\right)^{\frac{1}{p}} \text{ (}\mathbf{L^p}\text{-}\mathbf{Norm}\text{)}$$

$$\|f\|_{[a\ ,\ b]} := \sup\left\{|f(x)|\,\middle|\, x \in [a\ ,\ b]\right\} \text{ (}\mathbf{Supremumsnorm}\text{)}$$

Die L^2-Norm spielt in der Quantenmechanik eine wichtige Rolle

4) Vektorräume mit Skalarprodukt erhalten durch $\|x\| := \sqrt{(x\ ,\ x)}$ eine Norm. Der euklidische $\mathbb{C}^n$ mit dem Skalarprodukt

$$(\vec{z}\ ,\ \vec{w}) := \sum_{t=1}^{n} z_t\ \bar{w}_t$$

(es gilt $\overline{(\vec{z}\ ,\ \vec{w})} = (\vec{w}\ ,\ \vec{z})$) und der Raum $R(T)$ der T-periodischen Regelfunktionen auf $\mathbb{R}$ mit

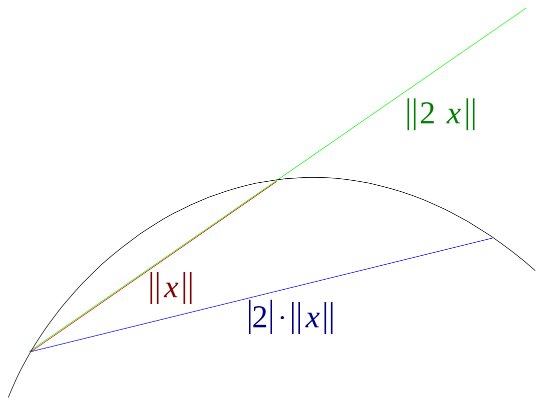
$$(f\ ,\ g) := \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\ \overline{g(t)}\ \mathrm{d}\ t$$

gehören dazu.

$$\left(e^{i\,n\,x}\ ,\ e^{i\,m\,x}\right) = \delta_{nm}$$

Bemerkung: *Nicht immer lässt sich eine Norm definieren. Betrachtet man z.B. die Punkte einer*

Kreisfläche, gilt mit dem 2-dimensionalen euklidischen Normbegriff $\|\alpha x\| \neq |\alpha| \|x\|$



Definition (Metrischer Raum): Sei X eine Menge. Eine Metrik auf X ist eine Funktion d, die je 2 Punkten $x, y \in X$ eine reelle Zahl $d(x, y)$ zuordnet, so dass gilt:
(M1) $d(x, x) = 0$ und $d(x, y) > 0$ für $x \neq y$
(M2) $d(x, y) = d(y, x)$
(M3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Das Paar (X, d) heißt **metrischer Raum**, oft schreibt man nur X.
Die Zahl $d(x, y) \in \mathbb{R}$ heißt **Abstand** der Punkte x,y.

Beispiel:

1) Die normierten Räume $(V, \|\ldots\|)$ mit $d(x, y) := \|x - y\|$ sind metrische Räume.

2) $f, g \in C(a, b)$, $d(f, g) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\|f - g\|_n}{1 + \|f - g\|_n}$,
wobei $\|\ldots\|_n$ die Supremumsnorm bezüglich des Intervalls $C(a, b)$ ist.

3) **Diskrete Metrik**:
Gegeben sei X beliebige, nichtleere Menge.
Diskrete Metrik: $d(x, x) = 0$; $d(x, y) = 1 \quad x \neq y$.

Beweis: (M1) ok; (M2); ok (M3) ok.
Sei $x = z$: $d(x, y) \leq d(x, x) + d(x, y)$.
Sei $x \neq z \Rightarrow x \neq y$ oder $y \neq z$.
$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

II. Topologische Räume

Definition (Topologischer Raum): In einer Menge X sei eine Menge O von Teilmengen von X, die man offen nennt, ausgezeichnet derart, dass folgende Axiome gelten:
(O1) Der Durchschnitt je zweier offener Mengen ist offen
(O2) Die Vereinigung beliebig vieler offener Mangen ist offen
(O3) X und die leere Menge sind offen.

Dann heißen O eine **Topologie auf X** und das Paar (X, O) **topologischer Raum**.
Oft schreibt man nur X statt (X, O).

Definition (Umgebung in einem topologischen Raum): Eine Teilmenge U eines topologischen Raums X heißt **Umgebung** von a in X, wenn es eine offene Menge V mit $a \in V \subset U$ gilt.

Bemerkungen zu Topologien

1) Jeder metrische Raum ist zugleich topologischer Raum.
2) Auf jeder Menge X lässt sich eine topologische Struktur dadurch erklären, dass jedem Punkt $x \in X$ alle x enthaltenden Teilmengen von X als Umgebungen zugeordnet werden.
3) Die „feinste“ Topologie ist die Menge aller Teilmengen.
4) Die „gröbste“ Topologie ist die diskrete Topologie von X: Die Umgebungen eines Punktes $x \in X$ bestehen nur aus der Menge $\{x\}$.

Beispiel: $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$
$T = \{\{0\}, \{1,2,3\}, \emptyset, \{0,1,2,3\}, \{0,1,2,3,4\}\}$

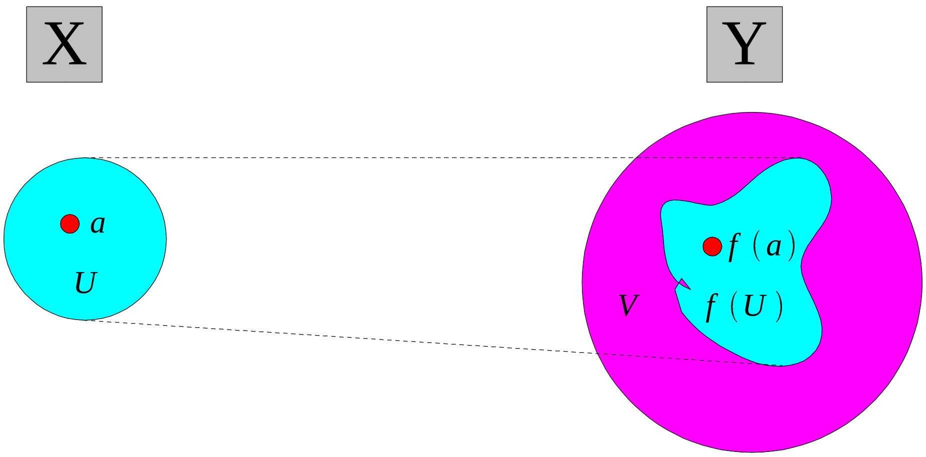
Behauptung: X zusammen mit T bilden eine Topologie.
(O3) $X, \emptyset \in T$
(O1) $A, B \in T \rightarrow A \cap B \in T$
$\{0\} \cap \{1,2,3\} = \emptyset$
$\{0,1,2,3\} \cap \{1,2,3\} \in T$
$\{0,1,2,3,4\} \cap \{1,2,3\} \in T$
(O2) $A, B \in T \Rightarrow A \cup B \in T$
$\{0\} \cup \{1,2,3\} = \{0,1,2,3\} \in T$
$\{1,2,3\} \cup \{0,1,2,3\} = \{0,1,2,3\} \in T$

1.3 Stetige Abbildungen

I. Stetigkeit

Dehnen den Begriff aus von komplexen Funktionen auf einer Menge $D \subset \mathbb{C}$ auf Abbildungen $X \rightarrow Y$, wobei X, Y topologische Räume sind.

Definition: $f: X \rightarrow Y$ heißt **stetig** im Punkt $a \in X$, wenn es zu jeder Umgebung V von $f(a)$ eine Umgebung U von a gibt, so dass $f(U) \subset V$.
Die Abbildung heißt **stetig in X**, wenn sie in jedem Punkt stetig ist.



Für metrische Räume X,Y gilt folgendes $\varepsilon-\delta-$Kriterium , das in 1-D als Definition diente.

Satz (**ε - δ -Kriterium)**: $f: X\to Y$ ist in $a\in X$ stetig $\Leftrightarrow$ $\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,\delta>0\ \vdots\ (*)\,d\big(f(x),f(a)\big)<\varepsilon\ \ \forall\,x\in X$ mit $d(x,a)<\delta$

Beweis:

$\Leftarrow$: Sei V eine beliebige Umgebung von $b=f(a)$ und sei $K_\varepsilon(b)\subset V$ eine mit der Metrik definierte Kugelumgebung. Zu ε wähle man δ gemäß der Voraussetzung. Setzen wir $U:=K_\delta(a)$, gilt dann $f(U)<K_\varepsilon(b)\subset V$. Somit f stetig in a.

$\Rightarrow$: Sei f stetig. Dann gibt es zu jeder Umgebung $K_\varepsilon(b)$ Umgebung U von a mit $f(U)\subset K_\varepsilon(b)$. In U liegt eine Kugel $K_\delta(a)$. Damit gilt aber $f(K_\delta(a))\subset K_\varepsilon(b)$. Also erfüllt δ die Bedingung $d(x,a)<\delta$.

Beispiele:

1. Jede lineare Abbildung $f: K^n\to K^m$ ist stetig. Dazu kann man beliebige Norm heranziehen.
2. Jede Norm $\|\ \|: V\to R$ ist stetig, denn es gilt $d(\|x\|,\|y\|)<\varepsilon$ wenn $\|x-y\|<\varepsilon$, da $\big|\|x\|-\|y\|\big|\le\|x-y\|$ mit $\delta:=\varepsilon$ ist (*) erfüllt.

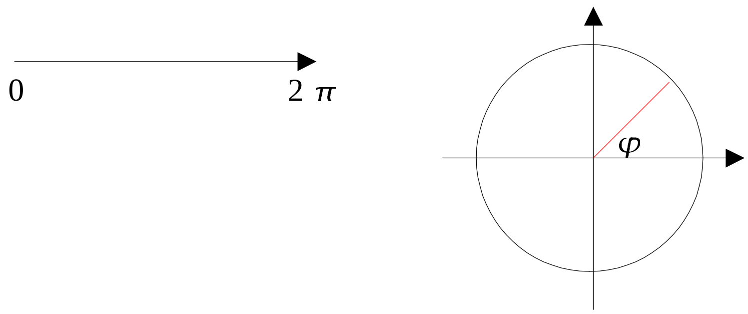
Folgenkriterium: Es seien X und Y metrische Räume. Eine Abbildung $f: X\to Y$ ist stetig in $a\in X$ $\Leftrightarrow$ f bildet eine Folge $\big(f(x_k)\big)$ mit $f(x_k)\to f(a)$ ab.

Beweis: Analog zu Kap 7.1 in 1-D.

Es gelten für beliebige topologische Räume folgende Rechenregeln:
Regel I: $f=(f_1,f_2):\ X\to Y_1\times Y_2$ ist stetig in a $\Leftrightarrow$ $f_1: X\to Y_1$ und $f_{2:}\ X\to Y_2$ sind in a stetig.
Regel II: Sind $f,g: X\to K$ stetig in $a\in X$, so sind es auch $f+g$ und $f\cdot g$. Ist $g(a)\neq 0$, so ist auch f/g stetig in a.
Regel III: In $X\xrightarrow{f}Y\xrightarrow{g}Z$ seien f in a und g in $f(a)$ stetig. Dann ist auch $g\circ f$ stetig in a.

II Homöomorphismus

Betrachten wir die Abbildung $\varphi\to z=e^{i\varphi}$ des Intervalls $[0,2\pi)$ auf die Kreislinie $S^1:=\{z\in\mathbb{C};|z|=1\}$. Diese Abbildung ist bijektiv, sie ist auch stetig.



Aber: Die Umkehrabbildung z mit $|z|=1 \to \varphi \operatorname{Arg} z$ ist unstetig bei $z=x$ ($\varphi=0$ oder 2π). $z=|z|e^{i\varphi}$.

Definition: Eine bijektive stetige Abbildung $f : X \to Y$, deren Umkehrabbildung ebenfalls stetig ist, heißt **Homöomorphismus**.
2 topologische Räume X, Y heißen **zueinander homöomorph**, wenn es einen Homöomorphismus zwischen ihnen gibt.

Ein solcher bildet offene Mengen auf offene Mengen ab und abgeschlossene auf abgeschlossene. Homöomorphe Räume haben dieselben topologischen Eigenschaften, auch wenn sie sehr verschiedene geometrische Formen haben.

Beispiel 1: Die Kugel $K_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ bezüglich einer beliebigen Norm $\|\|$ ist homöomorph zum ganzen $\mathbb{R}^n$.
Ein Homöomorphismus $\vec{f} : K_1(0) \to \mathbb{R}^n$ und seine Umkehrung sind gegeben durch

$$\vec{f}(\vec{x}) := \frac{\vec{x}}{1-\|\vec{x}\|}, \quad \vec{f}^{-1}(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{1+\|\vec{x}\|}.$$

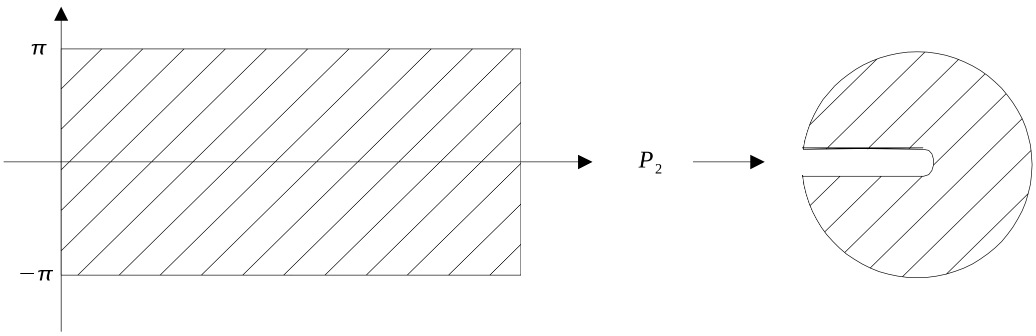
***Bemerkung**: Im 2D ist*

$$f = \begin{pmatrix} \dfrac{u}{1-\sqrt{u^2+v^2}} \\ \dfrac{v}{1-\sqrt{u^2+v^2}} \end{pmatrix} \qquad u^2+v^2<1 .$$

Beispiel 2: Polarkoordinaten: In der Ebene lässt sich folgender Homöomorphismus konstruieren:

$$P_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad R_2(r,\varphi) := \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}.$$

Das ist die Abbildung des offenen Streifens $\mathbb{R}_+ \times (-\pi,\pi)$ auf die längs der negativen x-Achse geschlitzten Ebene, d.h. auf $\mathbb{R}^2 \setminus S$, $S := \{(t,0)^T \mid t \le 0\}$



Die Umkehrung
$g_2 : \mathbb{R}^2 \setminus S \to \mathbb{R}_+ \times (-\pi , \pi)$
ist
$$g_2 (x_1 , x_2) := \left(r , \operatorname{sign} x_2 \cdot \arccos \frac{x_1}{r} \right) ,$$
wobei $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

III. Grenzwerte

Wie Stetigkeit kann man auch Begriff des Grenzwerts auf Abbildungen ausdehnen:

Definition (ε - δ -Kriterium mit Grenzwert): X , Y seien metrische Räume. Wir sagen, $f : D \to Y$ mit $D \subset X$ hat in einem Häufungspunkt $a \in X$ von D den **Grenzwert** $b \in Y$, wenn $\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0 \vdots d (f (x) , b) < \varepsilon$ für $x \in D \setminus \{a\}$ mit $d (x , a) < \delta$.

IV. Vollständige metrische Räume und gleichmäßige Konvergenz

Definition: Ein metrischer Raum (X , d) heißt **vollständig**, wenn jede Cauchyfolge in X einen Grenzwert hat.
Dabei heißt eine Folge (x_k) in X **Cauchy-Folge**, wenn $\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ N (c) \in \mathbb{N} \ \vdots \ d (x_k , x_l) < \varepsilon \quad \forall\ k , l \geq N (\varepsilon)$.

Beispiel: Jeder endlichdimensionale normierte Vektorraum ist vollständig, $C [a , b]$ mit Supremumsnorm ist vollständig.

Definition: Sei X ein beliebiger topologischer Raum und Y ein vollständiger metrischer Raum. Eine Folge von Abbildungen $f_k : X \to Y$ heißt **gleichmäßig konvergent** auf X , wenn es $\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ N (\varepsilon) \in \mathbb{N} \ \vdots \ d \left(f_k (x) , f_l (x) \right) < \varepsilon \quad \forall\ x \in X \wedge \forall\ k , l \geq N ($
.

Satz: Die Grenzabbildung f einer auf X gleichmäßig konvergenten Folge stetiger Abbildungen $f_k : X \to Y$ ist stetig.

1.4 Kompakte Räume

Abgeschlossene Intervalle im $\mathbb{R}^n$ spielen eine besondere Rolle: Satz von Maximum und Minimum gilt nur für kompakte Intervalle (7.5). In 16.25 Heine-Borel-Überdeckungssatz.

Definition: Unter einer **offenen Überdeckung** eines topologischen Raumes X versteht man eine Familie $\{U_i\}_{i\in I}$ (I = Indexmenge) offener Mengen in X derart, dass jeder Punkt $x \in X$ in mindestens einem U_i liegt.

Definition: Ein topologischer Raum X heißt **kompakt**, wenn aus jeder vorgegebenen offenen Überdeckung $\{U_i\}$ von X endlich viele $U_{i_1}, \dots, U_{i_r}$ so ausgewählt werden können, dass diese bereits X überdecken: $X = U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \dots \cup U_{i_r}$.
Eine Menge $K \subset X$ heißt **kompakt**, wenn sie als Teilraum kompakt ist. K besitzt die Heine-Borel-Eigenschaft.

D.h. die Heine-Borel-Eigenschaft vererbt sich nicht auf Teilmengen.

Definition: Ein topologischer Raum X heißt **folgenkompakt**, wenn jede Folge von Punkten in X eine konvergente Teilfolge besitzt.
Eine Teilmenge $K \subset X$ heißt **folgenkompakt**, wenn sie als Teilraum folgenkompakt ist (**Bolzano-Weierstraß-Eigenschaft**).

Definition: Man nennt eine Teilmenge $M \subset X$, wobei X ein metrischer Raum ist, **beschränkt**, wenn sie in einer geeigneten Kugel $K_r(b)$ Platz hat, $M \subset K_r(b)$.

Satz: Für $K \subset \mathbb{R}^n$ sind folgende Aussagen äquivalent:
1. K ist abgeschlossen und beschränkt.
2. K ist kompakt.
3. K ist folgenkompakt.

Beweis: Königsberger

***Bemerkung**: Im Allgemeinen 'abgeschlossen' $\neq$ kompakt'.*

Beispiel: Raum $C[0,1]$ mit der L_2-Norm:
Einheitskugel $\overline{K_1(0)} = \{f \,|\, \|f\|_2 \leq 1\}$ dieses Raumes ist nicht kompakt.

Zeigen: Die Folge von Funktionen $e_k : [0,1] \to \mathbb{C}$, $e_k(x) := e^{2\pi i x}$ besitzt keine konvergente Teilfolge. $\|e_k\| = 1$;

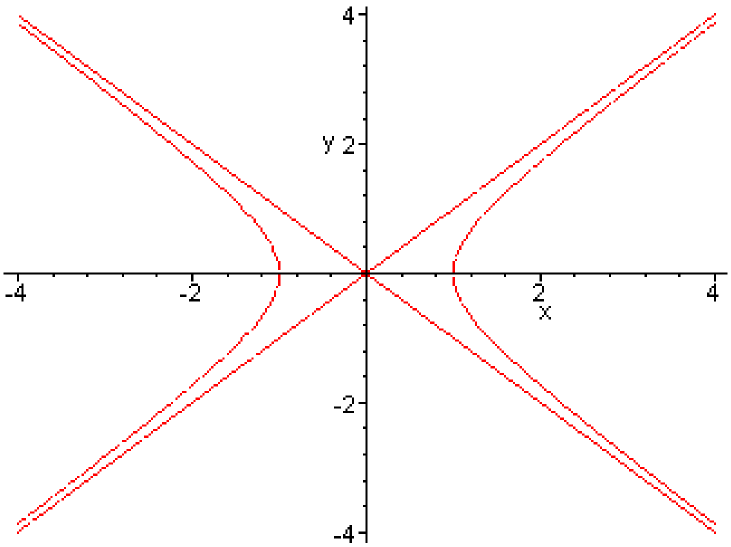
$$\|e_k - e_l\| = \sqrt{\int_0^1 \mathrm{d}x\,(e_k - e_l)(\overline{e_k} - \overline{e_l})} = \sqrt{2 - 2\underbrace{\int_0^1 \mathrm{d}x\,\cos[2\pi x(k-l)]}_{=0}} = \sqrt{2} \quad \text{für } k \neq l\,.$$

1.5 Zusammenhang

Zwischenwertsatz für stetige Funktionen setzt als Definitionsbereich ein Intervall voraus. Wie verallgemeinert sich das „Intervall“ auf mehrere Dimensionen?

Definition: Ein topologischer Raum X heißt **zusammenhängend**, wenn es keine Zerlegung $X = U \cup V$ gibt, in der U und V disjunkt, offen und nicht leer sind.
Eine Teilmenge $X_0 \subset X$ heißt **zusammenhängend**, wenn sie es als Teilraum ist.

Beispiel 1: Die Hyperbel $H = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_1^2 - x_2^2 = 1\}$ hängt nicht zusammen:



Beide Äste: punktfremd (also disjunkt), nicht leer, H-offen.

Beispiel 2: Ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ ist zusammenhängend.

Satz (Zwischenwertsatz): Der Definitionsbereich X der stetigen Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ sei zusammenhängend. Ferner seien a und b Punkte in X. Dann nimmt f jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.

Beweis: Königsberger

2. Differenzierbare Funktionen

2.1 Differenzierbarkeit und partielle Differenzierbarkeit

Eine Funktion f einer reellen Veränderlichen ist in a differenzierbar, wenn
$\exists \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(f(a+h) - f(a) \right)$.

Gleichwertig damit ist die Existenz einer (von a abhängigen) linearen Abbildung $L: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, so dass
$\lim_{h \to 0} \frac{1}{|h|} \left[f(a+h) - f(a) - L\,h \right] = 0$
gilt. Dabei ist dann $L\,h = f'(a) \cdot h$.

$\vec{a} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{a} + \vec{h} \in \mathbb{R}^n$

I. Der Begriff der Differenzierbarkeit

Definition: $f: U \to \mathbb{C}$ auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt **differenzierbar** im Punkt $\vec{a} \in U$, wenn es eine lineare Abbildung $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ gibt, so dass

(1) $\lim_{\vec{h} \to 0} \frac{f(\vec{a}+\vec{h}) - f(\vec{a}) - L\,\vec{h}}{\|\vec{h}\|} = 0$.

Dabei ist es gleichgültig, welche Norm verwendet wird, da man zeigen kann, dass alle Normen auf $\mathbb{R}^n$ zueinander äquivalent sind.

Oft formuliert man (1) anhand des durch $f(\vec{a}+\vec{h}) = f(\vec{a}) + L\,\vec{h} + R(\vec{h})$ erklärten Restes $R(\vec{h})$. Sie lautet dann:

(1') $\lim_{\vec{h} \to 0} \frac{R(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = 0$.

Lemma: Die Bedingung (1) wird von höchstens einer linearen Abbildung L erfüllt.

Beweis: Ist L* eine weitere, so gilt für jeden Vektor $\vec{v}$ mit $\|\vec{v}\| = 1$

$$(L - L^*)\,\vec{v} = \lim_{t \downarrow 0} \frac{(L - L^*)(t\,\vec{v})}{\|t\,\vec{v}\|} = 0 .$$

Die Menge der Einheitsvektoren spannen den ganzen $\mathbb{R}^n$ auf, und da $\vec{v}$ beliebig war, und $t\,\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ $\mathbb{R}^n$ aufspannt $\Rightarrow$ $L = L^*$.

Definition: Die eindeutig bestimmte lineare Abbildung L heißt das **Differenzial** oder **totales Differenzial** oder **Linearisierung** der Funktion f im Punkt $\vec{a}$ und wird mit $\mathrm{d}\,f(\vec{a})$ oder $\mathrm{d}\,f_{\vec{a}}$ bezeichnet.

Sei $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$. Wegen der Linearität von $\mathrm{d}\,f(\vec{a})$ gilt für jeden Vektor $\vec{h} = \left(h_1, \dots, h_n\right)^T \in \mathbb{R}^n$

$$\mathrm{d}\,f(\vec{a}) \cdot \vec{h} = \sum_{\nu=1}^{n} \left(\mathrm{d}\,f(\vec{a}) \cdot \vec{e}_\nu \right) \cdot h_\nu$$

(dies ist sozusagen ein Skalarprodukt, das Ergebnis ein Skalar).

$$\left[\lim_{h\to 0}\frac{f(\vec{a}+h)-f(\vec{a})-L\vec{h}}{\|\vec{h}\|}=0\right]:\ \mathrm{d}f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}\ .$$

$$h_1=\vec{h}\cdot\vec{e}_1$$

Definition: Die 1-zeilige Matrix $\vec{f}'(\vec{a}):=(\mathrm{d}f(\vec{a})\cdot\vec{e}_1,\dots,\mathrm{d}f(\vec{a})\cdot\vec{e}_n)$ nennen wir die **Ableitung** von f in $\vec{a}$.

Der Wert $\mathrm{d}f(\vec{a})\cdot\vec{h}$ ergibt sich durch Multiplikation der Matrix $\vec{f}'(\vec{a})$ mit dem Vektor $\vec{h}\in\mathbb{R}^n$:

$\mathrm{d}f(\vec{a})\cdot\vec{h}=\vec{f}'(\vec{a})\cdot\vec{h}$;

Die Funktion $T\,f(\vec{x};\vec{a}):=f(\vec{a})+\vec{f}'(\vec{a})\cdot(\vec{x}-\vec{a})$ heißt die **lineare Approximation** von f in $\vec{a}$.

Ist f reell, so stellt

$x_{n+1}=T\,f(\vec{x};\vec{a})$

eine Hyperebene im $\mathbb{R}^{n+1}$ dar.

Sie heißt **Tangentialhyperebene** an den Graphen von f in $\left(\vec{a},f(\vec{a})\right)$.

Satz: Wie im Fall $n=1$ gilt: Eine in $\vec{a}$ differenzierbare Funktion ist dort auch stetig.

Beweis: In $f(\vec{a}+\vec{h})=f(\vec{a})+L\vec{h}+R(\vec{h})$ gilt $L\vec{h}\to 0$ und $R(\vec{h})\to 0$ für $\vec{h}\to 0$.

Beispiele 1:

$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$;

$f\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)=f(x\vec{e}_1+y\vec{e}_2)=f(x,y)$;

z.B. $f=e^{2x+y}$;

[Grafik]

Sei

$\vec{a}=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$, $\vec{h}=\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}$;

Änderung von f um $x_0,y_0\to x,y$ besteht aus 2 getrennten Teilen, der Änderung in x und der Änderung in y.

$\underbrace{f(x,y_0)}_{=:g(x)}=\underbrace{f(x_0,y_0)}_{=g(x_0)}+(x-x_0)\cdot\mathrm{d}f(x_0,y_0)\cdot\vec{e}_1=g'(x)$;

$\underbrace{f(x_0,y)}_{=:\gamma(y)}=\underbrace{f(x_0,y_0)}_{=\gamma(y_0)}+(y-y_0)\cdot\mathrm{d}f(x_0,y_0)\cdot\vec{e}_2=\gamma'(y_0)$;

$\vec{f}'(x_0,y_0)=\left(g'(x_0),\gamma'(y_0)\right)$;

Konkret: Sei $f(x,y)=e^{2x+y}\ \ \in C^\infty$.

$(x_0,y_0)=(0,0)$;

$f(x,y_0)=f(x,0)=:g(x)=e^{2x}$; $g'(x)=2e^{2x}$; $g'(0)=2$;

$f(x_0,y)=f(0,y)=:\gamma(y)=e^y$; $\gamma'(y)=e^y$; $\gamma'(0)=1$;

$e^{2x+y}=1+2\cdot x+1\cdot y+R\left(\mathrm{o}(\sqrt{x^2+y^2})\right)$; o: Landau-Symbol

$\vec{f}'(0)=(2,1)$;

$\vec{h}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$;

$\vec{f}(x)=e^{2x+y}=\underbrace{1}_{f(0)}+\vec{f}'(0)\cdot\vec{h}$;

[Grafik „Qualle“][Grafik Achsen]

Tangentialebene:

$z=f(x_0,y_0)+g'(x_0)(x-x_0)+\gamma'(y)(y-y_0)$ ist die Gleichung einer Ebene. Es ist die Tangentialebene zur Fläche $w=f(x,y)$ im $\mathbb{R}^3$.

$z=a\,x+b\,y$;

Beispiel 2: Sei $f(\vec{x})=\vec{x}^T\cdot B\cdot\vec{x}$, sei $B=(b_{ik})$ eine symmetrische $n\times n$ -Matrix. Es gilt:

$f(\vec{a}+\vec{h})=(\vec{a}+\vec{h})^T\cdot B\cdot(\vec{a}+\vec{h})=f(\vec{a})+\underbrace{\left(\vec{a}^T\cdot B\cdot\vec{h}+\vec{h}^T\cdot B\cdot\vec{a}\right)}_{=2\vec{h}^T\cdot B\cdot\vec{a}=L\vec{h}}+\underbrace{\vec{h}^T\cdot B\cdot\vec{h}}_{=R}$;

$\vec{a}^T\cdot B\cdot\vec{h}=\sum_{ij} a_i b_{ij} h_j=\sum_{ji} a_j b_{ji} h_i=\sum_{ij} h_i b_{ij} a_j=\vec{h}^T\cdot B\cdot\vec{a}$;

$f(\vec{a}+\vec{h})=f(\vec{a})+\underbrace{2\vec{a}^T\cdot B\cdot\vec{h}}_{L\vec{h}}+\underbrace{\vec{h}^T\cdot B\cdot\vec{h}}_{=R(\vec{h})}=f(\vec{a})+\underbrace{\mathrm{d}f(\vec{a})\cdot\vec{h}}_{2\vec{a}^T\cdot B\cdot\vec{h}}$;

$L\vec{h}:=2\vec{a}^T\cdot B\cdot\vec{h}$ definiert eine lineare Abbildung und $R(\vec{h}):=\vec{h}^T\cdot B\cdot\vec{h}$ erfüllt die Bedingung

$\lim_{\vec{h}\to 0}\frac{R(\vec{h})}{\|\vec{h}\|}=0$,

denn $\mu:=\max\{|b_{ik}|\}$.

$|R(\vec{h})|\le\mu\cdot n^2\|\vec{h}\|_\infty^2$.

Somit ist f in jedem Punkt $\vec{a}$ differenzierbar und es gilt:

$\mathrm{d}f(\vec{a})\cdot\vec{h}=2\vec{a}^T\cdot B\cdot\vec{h}$;

$\vec{f}'(\vec{a})=2\vec{a}^T\cdot B$;

$f(\vec{x})=\vec{x}^T\cdot B\cdot\vec{x}$;

allgemein: $\vec{f}'(\vec{a})=\vec{a}^T\cdot B+B\cdot\vec{a}$;

II. Darstellung des Differenzials durch Richtungsableitungen

Sei f in $\vec{a}$ differenzierbar. Es soll berechnet werden $\mathrm{d}f(\vec{a})\cdot\vec{h},\quad \vec{h}\in\mathbb{R}^n$.

$f(\vec{a}+t\vec{h})=f(\vec{a})+\mathrm{d}f(\vec{a})\cdot t\vec{h}+R(t\vec{h}) \quad\Rightarrow\quad t\neq 0$ und $\vec{h}\neq 0$.

$\mathrm{d}f(\vec{a})\cdot\vec{h}=\frac{f(\vec{a}+t\vec{h})-f(\vec{a})}{t}-\frac{R(t\vec{h})}{t\|\vec{h}\|}\cdot\|\vec{h}\|$;

Hatten aus (1'):

$\left[\lim_{\vec{h}\to 0}\frac{R(\vec{h})}{\|\vec{h}\|}=0\right]$.

Daraus folgt:

(*) $\mathrm{d}f(\vec{a})\cdot\vec{h}=\lim_{t\to 0}\frac{f(\vec{a}+t\vec{h})-f(\vec{a})}{t}$;

Definition: Sei $f: U \to \mathbb{C}$ eine (nicht notwendig differenzierbare) Funktion in einer Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ von $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$. Dann versteht man unter der **Ableitung von f** in $\vec{a}$ **in Richtung des Vektors** $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$ im Existenzfall den Grenzwert

$$\partial_{\vec{h}} f(\vec{a}) := \lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{a}+t\vec{h})-f(\vec{a})}{t}.$$

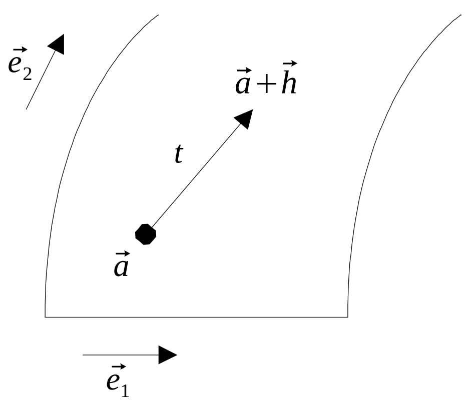
Definition: Die Ableitungen in den Richtungen $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ der Standardbasis heißen **partielle Ableitungen** von f und f heißt **partiell differenzierbar** in $\vec{a}$, wenn dort alle partiellen Ableitungen

$$\partial_{\vec{e}_1} f(\vec{a}), \ldots, \partial_{\vec{e}_n} f(\vec{a})$$

existieren.

Man bezeichnet die partiellen Ableitungen auch:

$$\partial_{\vec{e}_\nu} f(\vec{a}) = \partial_\nu f(\vec{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(\vec{a}) = f_{x_\nu}(\vec{a});$$



***Bemerkung**: Hier geht wesentlich die Linearität der Ableitungen ein. Statt die totale Änderung einer Funktion von* $\vec{a}$ *in Richtung* $\vec{a}+\vec{h}$ *zu berechnen, kann man auch die partiellen Änderungen entlang der Koordinatenachsen berechnen und addieren. Dies drückt folgender Satz aus:*

Satz: Eine in $\vec{a}$ differenzierbare Funktion f hat dort Ableitungen in jeder Richtung, ist dort also insbesondere partiell differenzierbar. Für jeden Vektor $\vec{h} = (h_1, \ldots, h_n)^T \in \mathbb{R}^n$ gilt:

(**) $$\mathrm{d} f(\vec{a}) \cdot \vec{h} = \vec{f}'(\vec{a}) \cdot \vec{h} = \partial_{\vec{h}} f(\vec{a}) = \sum_{\nu=1}^{n} \partial_\nu f(\vec{a}) h_\nu.$$

***Merke**: Die Ableitung ist allgemein ein Vektor, während die partiellen Ableitungen Skalare sind!*

Beweis des Satzes: Die Existenz aller Richtungsableitungen ist mit der Herleitung von

(*) $$\mathrm{d} f(\vec{a}) \cdot \vec{h} = \lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{a}+t\vec{h})-f(\vec{a})}{t}$$

gezeigt. Mit $\mathrm{d} f \cdot \vec{h} = \vec{f}'(\vec{a}) \cdot \vec{h}$ und (*) sind die ersten beiden Gleichheitszeichen bewiesen. Das letzte ist wegen

$$\mathrm{d}\, f(\vec{a})\cdot\vec{e}_\nu=\partial_\nu f(\vec{a})$$

das gleiche wie

$$\mathrm{d}\, f(\vec{a})\cdot\vec{h}=\sum_{\nu=1}^{n}(\mathrm{d}\, f(\vec{a})\cdot\vec{e}_\nu)h_\nu\ ;\ \vec{h}=\sum_{\nu=1}^{n}\vec{e}_\nu h_\nu\ .$$

Aus (**) folgen explizite Formeln für die Ableitung und die lineare Approximation einer in $\vec{a}=(a_1,\ldots,a_n)^T$ differenzierbaren Funktion f:

$$\vec{f}'(\vec{a})=\left(\partial_1 f(\vec{a}),\ldots,\partial_n f(\vec{a})\right)\ ;$$

$$T\, f(\vec{x}\,;\vec{a})=f(\vec{a})+\underbrace{\sum_{\nu=1}^{n}\partial_\nu f(\vec{a})(x_\nu-a\,\nu)}_{=\vec{f}'(\vec{a})(\vec{x}-\vec{a})}\ .$$

Berechnung partieller Ableitungen:

Die Definition

$$\partial_\nu f(\vec{a})=\lim_{t\to 0}\frac{f(\vec{a}+t\,\vec{e}_\nu)-f(\vec{a})}{t}$$

mit $\vec{a}=(a_1,\ldots,a_n)^T$ läuft darauf hinaus, in f $(x_1,\ldots,x_n)$ alle Variablen x_k bis auf die ν -te konstant = a_k zu setzen und dann nur noch die von x_ν abhängige Funktion als Funktion dieser einen Veränderlichen zu differenzieren.

Beispiel:

1\. : $f(x,y)=\sin 2x\cdot e^{3y}$;

$Delta_x f(x,y)=2\cos 2x\cdot e^{3y}$; $Delta_y f(x,y)=3\sin 2x\cdot e^{3y}$;

2\. : $f(x,y)=x^2 y^3+y\ln x$;

$f_x(x,y)=\partial_x f(x,y)=2x\,y^3+\dfrac{y}{x}$; $f_y(x,y)=3x^2 y^2+\ln x$;

$\vec{f}'(\vec{x})=\left(f_x(x,y),f_y(x,y)\right)$;

3\. (Physik-Probeklausur): $\varrho(\vec{r})=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{e^{-\alpha r}}{r}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{e^{-\alpha\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$;

Ableitungen nach den drei Komponenten: $\varrho_x,\varrho_y,\varrho_z$.
Außerdem kann man nach dem Radialvektor ableiten:

$$\partial_r\varrho=\varrho_r=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-\alpha e^{-\alpha r}r-e^{-\alpha r}}{r^2}\ ;$$

III. Das Hauptkriterium für Differenzierbarkeit

Um eine mittels Koordinaten definierte Funktion f auf Differenzierbarkeit in $\vec{e}$ zu untersuchen, klärt man zunächst, ob sie partiell differenzierbar ist. Wenn ok, dann prüft man weiter, ob die lineare Abbildung

$$L:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}, L\,\vec{h}=\sum_{\nu=1}^{n}\partial_\nu f(\vec{e})h_\nu$$

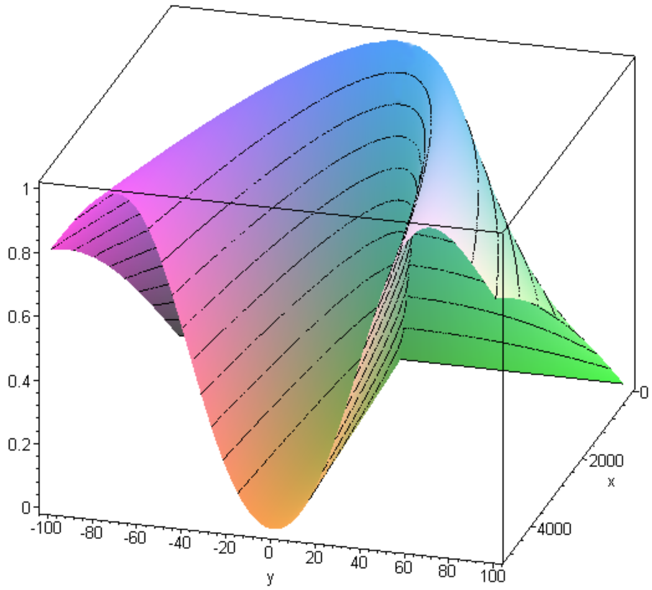
die Bedingung

(1) $\lim\limits_{\vec{h} \to 0} \dfrac{f(\vec{a} + \vec{h}) - f(\vec{a}) - L\,\vec{h}}{\|\vec{h}\|} = 0$

erfüllt.

Beispiel: Parabelfalte:

$$f(x, y) := \begin{cases} \dfrac{2 x y^2}{x^2 + y^4} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases};$$



Die Funktion ist von $(0,0)$ weg in alle Richtungen partiell differenzierbar.

$x \to f(x,0) = 0$ und $y \to f(0, y) = 0$ und

$t \to f(tu, tv) = \dfrac{2 t u v^2}{u^2 + t^2 v^2} \quad (u > 0)$

sind stetig und differenzierbar. Dagegen ist $f(x, y)$ für $y > 0$ auf der Parabel $x = y^2$ konstant, $f = 1$. Daher ist f unstetig in $(0,0)$

$f(x, y \to 0) \underset{x=y^2}{=} 1$;

$f(0, y) \underset{y \to 0}{=} 0$;

Differenzierbarkeitskriterium:

Existieren in einer Umgebung U von $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ alle partiellen Ableitungen $\partial_1 f, \dots, \partial_n f$ und sind diese im Punkt $\vec{a}$ stetig, so ist f in $\vec{a}$ differenzierbar.

Beweis: Nehmen f als reell an, sonst für $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ separat beweisen (weil f differenzierbar $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ sind differenzierbar).

Wir zeigen, dass die

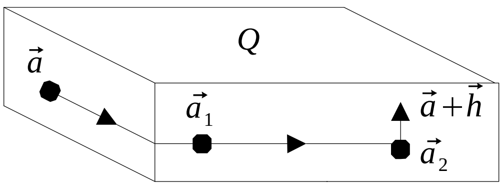
$$L:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\ ,\ L\vec{h}:=\sum_{\nu=1}^{n} \partial_\nu f(\vec{a})\cdot h_\nu$$

die Bedingung (1) erfüllt. Sei Q ein offener, achsenparalleler Quader in U mit $\vec{a}\in Q$. Jeder Punkt $\vec{a}+\vec{h}\in Q$ kann mit $\vec{a}$ durch einen stückweise achsenparallelen Streckenzug in Q verbunden werden. Man setze deren $\vec{a}_0:=\vec{a}$ und

$\vec{a}_\nu:=\vec{a}_{\nu-1}+h_\nu \vec{e}_\nu\ ,\ \nu=1,\ldots,n$,

wobei $\vec{h}=\left(h_1,\ldots,h_n\right)^T$.

Insbesondere ist $\vec{a}_n=\vec{a}+\vec{h}$.



Dann gilt:

$$f(\vec{a}+\vec{h})-f(\vec{a})=\sum_{\nu=1}^{n}\left(f(\vec{a}_\nu)-f(\vec{a}_{\nu-1})\right);$$

Nun werden die einzelnen Differenzen der Summe nach dem Mittelwertsatz der Differenzialrechnung einer Veränderlichen umgeformt.

Sei dazu:

$\varphi_\nu(t):=f\left(\vec{a}_{\nu-1}+t\ h\ \nu\ \vec{e}_\nu\right) \qquad t\in[0\ ,1]$.

Mit geeigneten Zahlen $\tau_\nu\in[0\ ,1]$ ist dann nach Definition von $\partial_\nu\ f$:

$\varphi_\nu(1)-\varphi_\nu(0)=\varphi\ '_\nu(\tau_\nu)=h_\nu\ \partial_\nu\ f\ (\vec{a}_{\nu-1}+\tau_\nu\ h_\nu\ \vec{e}_\nu)$.

Mit $\vec{\xi}_\nu:=\vec{a}_{\nu-1}+\tau_\nu\ h_\nu\ \vec{e}_\nu$ gilt also:

$f(\vec{a}_\nu)-f(\vec{a}_{\nu-1})=h_\nu\ \partial_\nu\ f\ (\vec{\xi}_\nu)$.

Damit folgt:

$$f(\vec{a}+\vec{h})-f(\vec{a})-L\ \vec{h}=\sum_{\nu=1}^{n}\left(\partial_\nu\ f\ (\vec{\xi}_\nu)-\partial_\nu\ f\ (\vec{a})\right)\cdot h_\nu\ .$$

Hieraus erhält man die Abschätzung

$$\left|f(\vec{a}+\vec{h})-f(\vec{a})-L\ \vec{h}\right|\le\left\|\vec{h}\right\|_\infty\sum_{\nu=1}^{n}\left|\partial_\nu\ f\ (\vec{\xi}_\nu)-\partial_\nu\ f\ (\vec{a})\right|\ .$$

Für $\vec{h}\to 0$ gilt $\vec{\xi}_\nu\to\vec{a}$ für $\nu=1\ ,\ldots,\ n$.

Wegen der Stetigkeit aller partieller Ableitungen in $\vec{a}$ folgt daher, dass

$\left|\partial_\nu\ f\ (\vec{\xi}_\nu)-\partial_\nu\ f\ (\vec{a})\right| \underset{\vec{\xi}_\nu\to\vec{a}}{\longrightarrow} 0$;

$$\Rightarrow \lim_{\vec{h}\to 0}\frac{f(\vec{a}+\vec{h})-f(\vec{a})-L\ \vec{h}}{\|\vec{h}\|_\infty}=0 \ \square$$

Beispiel: Differenziation rotationssymmetrischer Funktionen

$F\ :\ I\to\mathbb{C}$ auf $I\subset[0\ ,\infty]$;

$K\ (I):=\left\{x\in\mathbb{R}^n \middle| \|\vec{x}\|_2=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}=:r\in I\right\}$

eine Funktion f durch $f\ (\vec{x}):=F\ (r)$.

Sei I offen, F sei stetig differenzierbar $\rightarrow\ K(I)$ offen.
F hat $\forall\ \vec{x} \in K(I)$ die partiellen Ableitungen
$\partial_\nu f(\vec{x}) = \dfrac{F'(r)}{r} x_\nu \quad (\nu = 1, \dots, n)$.

Da $\partial_\nu f$ stetig $\Rightarrow$ f differenzierbar
$\vec{f}\,'(\vec{x}) = \dfrac{F'(r)}{r}(x_1, \dots, x_n)$;

z.B. $\mathbb{R}^3$: $f = \dfrac{1}{|\vec{x}|} = \dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\partial_x f = -\dfrac{1}{r^2}\dfrac{x}{r}$, $\partial_y f = -\dfrac{1}{r^2}\dfrac{y}{r}$, $\partial_z f = -\dfrac{1}{r^2}\dfrac{z}{r}$;
$\vec{f}\,'(\vec{r}) = -\dfrac{\vec{r}}{r^3}$;

D.h. bei radialsymmetrischen Funktionen ist die Ableitung besonders einfach.

> **Definition**: $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt **differenzierbar** auf U, **total differenzierbar** auf U, wenn sie auf jedem Punkt $\vec{x} \in U$ differenzierbar ist.
> Eine differenzierbare Funktion heißt **stetig differenzierbar** auf U, wenn $\vec{f}\,': U \rightarrow \mathbb{C}$, $\vec{x} \rightarrow \left(\partial_1 f(\vec{x}), \dots, \partial_n f(\vec{x})\right)$ stetig ist. Das ist genau dann der Fall, wenn alle partiellen Ableitungen $\partial_1 f, \dots, \partial_n f$ auf U existieren und stetig sind, weswegen f auch **stetig partiell differenzierbar** heißt.
> Der Vektorraum der stetig differenzierbaren Funktionen auf U: $C^1(U)$. Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ beliebig. Eine Funktion $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ nennen wir **stetig differenzierbar auf A**, wenn $\exists\ U$ offen mit $A \subset U$ und $\exists$ eine stetig differenzierbare Funktion $F: U \rightarrow \mathbb{C}$ mit $F|A = f$ gibt.

$F|A$: „F eingeschränkt auf A“

IV. Gradient

Auf $\mathbb{R}^n$ sei Skalarprodukt $(\dots, \dots)$ gegeben. 13.1 Standardskalarprodukt:
$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$.

Das Differenzial $\mathrm{d} f(\vec{a})$ einer in $\vec{a}$ differenzierbaren reellen Funktion kann mit Hilfe eines eindeutig bestimmten Vektors $\vec{g} \in \mathbb{R}^n$ wie folgt dargestellt werden:
$\underbrace{\mathrm{d} f(\vec{a})\,\vec{h}}_{L\,\vec{h}} = (\vec{g}, \vec{h}) \quad \forall\ \vec{h} \in \mathbb{R}^n$.

> **Definition**: Der vom Skalarprodukt abhängige Vektor $\vec{g}$ heißt **Gradient** von f in $\vec{a}$ und wird mit $\mathrm{grad}\ f(\vec{a})$ bezeichnet.
> Damit lauten die den Gradienten charakterisierende Bedingung und die Darstellung von $\mathrm{d} f(\vec{a})$ durch die Richtungsableitungen:
> $\mathrm{d} f(\vec{a})\,\vec{h} = \partial_{\vec{h}} f(\vec{a}) = \left(\mathrm{grad}\ f(\vec{a}), \vec{h}\right)$.

Im wichtigen Fall des Standardskalarprodukts ist

$\operatorname{grad} f(\vec{a})$ wegen

$$\partial_{\vec{h}} f(\vec{a}) = \sum_{\nu=1}^{n} \partial_\nu f(\vec{a})\, h_\nu$$

der Spaltenvektor

$$\operatorname{grad} f(\vec{a}) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(\vec{a}) \\ \vdots \\ \partial_n f(\vec{a}) \end{pmatrix} =: \vec{\nabla} f(\vec{a}) .$$

Nabla-Operator; englisch: **del operator**.

Beispiel: $f(x, y, z) = e^{x+2y} + 2x \sin z + z^3 x y$;

$$\vec{\nabla} f = \operatorname{grad} f(x, y, z) = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{x+2y} + 2 \sin z + z^2 y \\ 2 e^{x+2y} + z^2 x \\ 2x \cos z + 2 z x y \end{pmatrix};$$

Wir können aber die lineare Approximation von $f(\vec{x})$ nahe $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ schreiben:

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \operatorname{grad} f(\vec{x}_0) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) + \mathrm{O}(|\vec{x} - \vec{x}_0|^2) = f(\vec{x}_0) + \vec{\nabla} f(\vec{x}_0) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) + \mathrm{O}(|\vec{x} - \vec{x}_0|^2$$
.

$\vec{f}\,'(\vec{r}) \to \operatorname{grad} f(\vec{r})$.

Es bezeichne nun $\|\ldots\|$ die mit dem Skalarprodukt gegebene Norm $(= \|\ldots\|_2)$.
Wegen $\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\|\, \|\vec{b}\| \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$ folgt:

$$\vec{h} := \vec{x} - \vec{x}_0,\ \partial_{\vec{h}} f = \vec{\nabla} f \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0);$$
$$\partial_{\vec{h}} f(\vec{a}) = \|\operatorname{grad} f(\vec{a})\|\, \|\vec{h}\| \cos \sphericalangle(\operatorname{grad} f, \vec{h}).$$

(i) $\|\operatorname{grad} f(\vec{a})\|$ ist das Maximum der Richtungsableitungen $\partial_{\vec{h}} f(\vec{a})$ nach den Einheitsvektoren:
$$\|\operatorname{grad} f(\vec{a})\| = \max \left\{ \partial_{\vec{h}} f(\vec{a}) \middle| \|\vec{h}\| = 1 \right\} =: M .$$

(ii)Im Falle $M \neq 0$ gibt es genau einen Einheitsvektor $\vec{v}$ mit $\partial_{\vec{v}} f(\vec{a}) = M$ und mit diesem ist $\operatorname{grad} f(\vec{a}) = M \vec{v}$.

Der Gradient weist dann in die Richtung des steilsten Anstiegs.

[Grafik Höhenschichtlinien]

Beispiel: Im Falle der radialsymmetrischen Funktion

$$f = \frac{1}{|\vec{x}|}$$

fanden wir

$$\operatorname{grad} f = -\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3},$$

d.h. der Vektor weist in Richtung der Kugelmitte.

[Grafik Kugel]

Wir können also für jede auf $D \subset \mathbb{R}^n$ total differenzierbare Funktion f und für jeden Einheitsvektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $\|\vec{v}\| = 1$, sagen, dass

$$\partial_{\vec{v}} f(\vec{x}) = \vec{\nabla} f(\vec{x}) \cdot \vec{v} = \text{grad } f(\vec{x}) \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(\vec{x}) \cdot v_i$$

die Richtungsableitung bzw. der Anstieg von f an der Stelle $\vec{x}$ in Richtung $\vec{v}$ darstellt.

2.2 Rechenregeln: Kettenregel

Algebraische Regeln: Sind $f, g : U \to \mathbb{C}$ differenzierbar in $\vec{a} \in U$, dann sind auch $f + g$ und $f \cdot g$ in $\vec{a}$ differenzierbar und es gilt

$\mathrm{d}(f+g)(\vec{a}) = \mathrm{d} f(\vec{a}) + \mathrm{d} f(\vec{a})$

$\mathrm{d}(f \cdot g)(\vec{a}) = g(\vec{a})\, \mathrm{d} f(\vec{a}) + f(\vec{a})\, \mathrm{d} g(\vec{a})$.

Ist außerdem $g(\vec{a}) \neq 0$, so ist f/g differenzierbar in $\vec{a}$ und es gilt

$$\mathrm{d}\left(\frac{f}{g}\right)(\vec{a}) = \frac{g(\vec{a})\, \mathrm{d} f(\vec{a}) - f(\vec{a}) - \mathrm{d} g(\vec{a})}{(g(\vec{a}))^2}.$$

Beweis: Einsetzen wie 1-D

$$\vec{\nabla}(f g) = f \vec{\nabla} g + g \vec{\nabla} f.$$

In Verallgemeinerung der Richtungsableitung berechnen wir die Ableitung einer Funktion längs einer Kurve. Wir betrachten dazu eine Situation

$$I \xrightarrow{\gamma} U \xrightarrow{f} \mathbb{C},$$

in der $I \subset \mathbb{R}^n$ ein beliebiges, nicht notwendig offenes Intervall in $\mathbb{R}$ und $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge ist.

Kettenregel: Sei $\vec{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)^T : I \to U$ differenzierbar in t_0 und $f\colon U \to \mathbb{C}$ differenzierbar in $a = \gamma(t_0)$. Dann ist die zusammengesetzte Funktion $f \circ \vec{\gamma}$ differenzierbar in t_0 und hat dort die Ableitung

$$\frac{\mathrm{d}(f \circ \vec{\gamma})}{\mathrm{d} t}(t_0) = \mathrm{d} f(\vec{a})\, \dot{\vec{\gamma}}(t_0) = \text{grad } f(\vec{a}) \cdot \dot{\vec{\gamma}}(t_0) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(\vec{a})\, \dot{\gamma}_i(t_0) = \left(\text{grad } f(\vec{a}), \dot{\vec{\gamma}}(t_0)\right)$$

.

Kettenregel

$$\frac{\mathrm{d}(f \circ \vec{g})}{\mathrm{d} t}(t_0) = \text{grad } f(\vec{a}) \cdot \dot{\vec{\gamma}}(t_0) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i P(\vec{a})\, \dot{\gamma}_i(t_0)$$

$$I \xrightarrow{\vec{\gamma}} U \xrightarrow{f} \mathbb{C}$$

Beweis: Nach Voraussetzung gilt:

$$\vec{\gamma}(t_0 + k) = \vec{\gamma}(t_0) + \dot{\vec{\gamma}}(t_0)\, k + \vec{r}_1(k)\, |k|$$

mit $\lim_{k \to 0} \vec{r}_1(k) = \sigma$

$$f(\vec{a} + \vec{h}) = f(\vec{a}) + d f(\vec{a})\, \vec{h} + r_2(\vec{h})\, \|\vec{h}\|$$

mit $\lim\limits_{h \to 0} \vec{r}_2(h) = \sigma$

$\vec{h} = \vec{\gamma}(t_0 + h) - \underbrace{\vec{\gamma}(t_0)}_{:=\vec{a}}$

$\varphi(\vec{\gamma}(t_0 + h)) = \varphi(\vec{\gamma}(t_0)) + \mathrm{d}\ f(\vec{\gamma}(t_0))$

$R(k) = \mathrm{d}\ f(\vec{a})\ \vec{r}_1(k)\,|k| + r_2(\vec{\gamma}(t_0 + k) - \vec{\gamma}(t_0))$

$\|\vec{\gamma}(t_0)\, k + r_1(k)\,|k|\ \|$

Restglied hat Eigenschaft

$$\lim_{k \to 0} \frac{R(k)}{k} = 0$$

Beispiel 1: Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ eine differenzierbare Funktion. Durch Zusammensetzung mit der Polarkoordinatenabbildung $P_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$P_2(r, \varphi) := \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

erhält man die Funktion $F := f \cdot P_2$:

$$F(r, \varphi) = f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = f(r\cos\varphi\ ,\ r\sin\varphi)$$

$$f(\vec{x}) \equiv f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$$

hat partielle Ableitungen wie folgt:

Wir wenden Kettenregel bei festgehaltenem φ.

$$\vec{\gamma}(r) := \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$F_r(r\ ,\varphi) = f_x(r\cos\varphi\ ,\ r\sin\varphi)\frac{\mathrm{d}\ \gamma_x}{\mathrm{d}\ r} + f_y(r\cos\varphi\ ,\ r\sin\varphi)\frac{\mathrm{d}\ \gamma_y}{\mathrm{d}\ r}$$

Kettenregel bei festgehaltenem r, dann ist

$$\vec{\Gamma} := \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$F_\varphi(r\ ,\varphi) = f_x(r\cos\varphi\ ,\ r\sin\varphi)\frac{\mathrm{d}\ \Gamma_x}{\mathrm{d}\ \varphi} + f_y(r\cos\varphi\ ,\ r\sin\varphi)\frac{\mathrm{d}\ \Gamma_y}{\mathrm{d}\ \varphi}$$

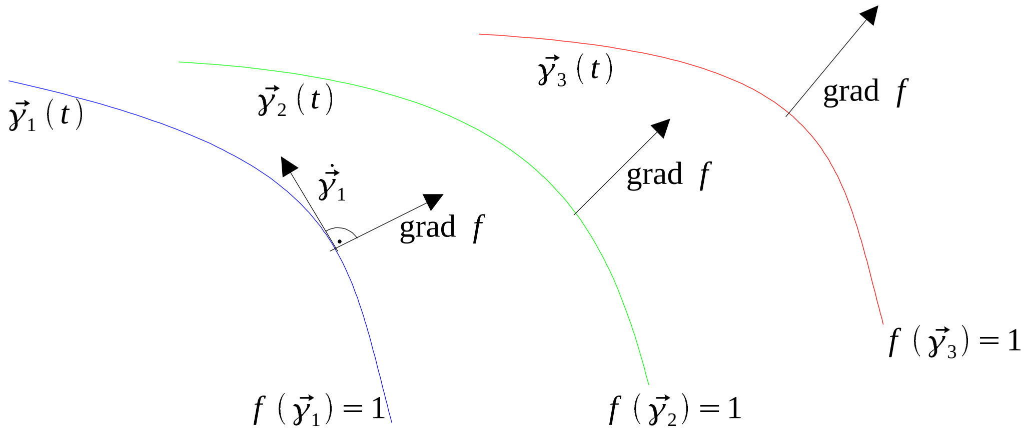
$$= -f_x\ r\sin\varphi + f_y\ r\cos\varphi$$

Beispiel: $f = x\ y$

$$F(r\ ,\varphi) = f(r\cos\varphi\ ,\ r\sin\varphi) = r^2\sin\varphi\cos\varphi$$
$$F_r = 2\ r\sin\varphi\cos\varphi$$
$$F_r = f_x\cos\varphi + f_y\sin\varphi = y\cos\varphi + x\sin\varphi = r\sin\varphi\cos\varphi + r\cos\varphi\sin\varphi$$
$$F_\varphi = r^2(\cos\varphi\cos\varphi - \sin\varphi\sin\varphi)$$
$$F_\varphi = -f_x\ r\sin\varphi + f_y\ r\cos\varphi =$$
$$= -y\ r\sin\varphi + x\ r\cos\varphi =$$
$$= -r^2\sin^2\varphi + r^2\cos^2\varphi\ ;$$

Beispiel 2: Auf $\mathbb{N}$ sei ein Skalarprodukt gegeben. Sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$. Weiter sei $\vec{\gamma} : I \to U$ eine differenzierbare Kurve, die in einer **Niveaumenge** von f verläuft, d.h. es gäbe eine Konstante $c \in \mathbb{R}$:

$f\left(\gamma(t)\right) = c \quad \forall\ t \in I$.
Dann gilt $\forall\ t \in I$:
$\operatorname{grad} f\left(\vec{\gamma}(t)\right) \perp \dot{\vec{\gamma}}(t)$;



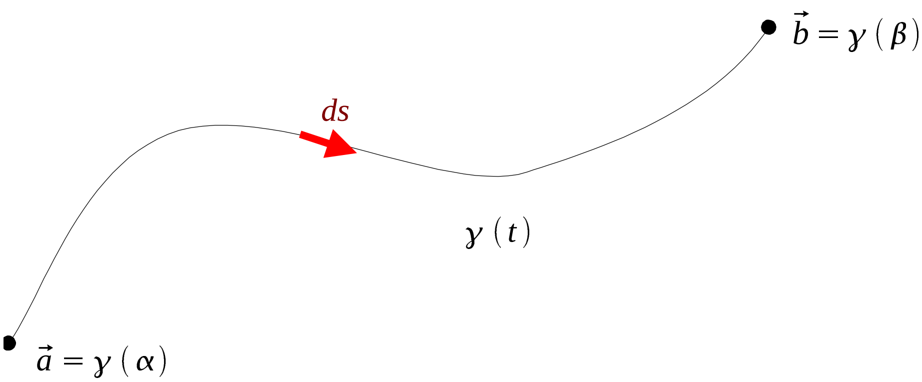
Beweis:

Da $f \cdot \vec{\gamma}$ konstant:
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\ t}(f \cdot \vec{\gamma}) = 0$.

2.3 Kurvenintegral

Satz: Sei $f: U \to \mathbb{C}$ eine C^1-Funktion auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$. Weiter seien $\vec{a}, \vec{b} \in U$ und $\vec{\gamma}: [\alpha, \beta] \to U$ eine C^1-Kurve in U mit $\vec{\gamma}(\alpha) = \vec{a}$ und $\vec{\gamma}(\beta) = \vec{b}$. Dann gilt:

$$f(\vec{b}) - f(\vec{a}) = \int_\alpha^\beta \mathrm{d}\ f\left(\vec{\gamma}(t)\right) \dot{\vec{\gamma}}(t)\ \mathrm{d}\ t = \int_\alpha^\beta \operatorname{grad}\ f\left(\vec{\gamma}(t)\right) \cdot \dot{\vec{\gamma}}(t)\ \mathrm{d}\ t\,.$$



Beweis: Behauptung folgt aus Kettenregel und dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung, da der Integrand die Ableitung von $f(\vec{\gamma})$ ist.

Beispiel: Eine konservative Kraft $\vec{K}$ besitzt ein Potenzial U, so dass $\vec{K} = -\operatorname{grad}\ U$ ist.

z.B. Zentralkraft

$$\vec{K} = \frac{\alpha\,\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \quad (\vec{r} \neq 0) \;\Rightarrow\; U = \frac{\alpha}{|\vec{r}|} .$$

Die längs einer nicht durch Null gehenden regulären Kurve $\vec{w} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ geleistete Arbeit beträgt:

$$\int_{\vec{w}} \vec{K} \cdot \mathrm{d}\,\vec{r} = -\int_{\vec{w}} \operatorname{grad} U \cdot \mathrm{d}\,\vec{r} = -\int_a^b \operatorname{grad} U \cdot \dot{\vec{w}}(t)\,\mathrm{d}\,t = U\left(\vec{w}(a)\right) - U\left(\vec{w}(b)\right)$$

und ist unabhängig vom Weg $\vec{w}$, der durchlaufen wird.

Schrankensatz: Eine C^1-Funktion $f : K \to \mathbb{C}$ auf einer **kompakten zusammenhängenden** Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ ist Lipschitz-stetig, d.h. mit

$$\|\vec{f}\,'\|_K := \max_{\vec{\xi} \in K} \left(\left|\partial_1 f(\vec{\xi})\right| + \ldots + \left|\partial_n f(\vec{\xi})\right|\right)$$

gilt für beliebige $\vec{x}, \vec{y} \in K$

$$|f(\vec{y}) - f(\vec{x})| \leq \|\vec{f}\,'\|_K \cdot \|\vec{y} - \vec{x}\|_\infty .$$

($\|\ldots\|_\infty$: Maximumsnorm)

Beweis: Königsberger

2.4 Höhere partielle Ableitungen

Die partiellen Ableitungen $\partial_1 f, \ldots, \partial_n f$ können ihrerseits partiell differenzierbar sein. Man definiert:

Definition: Die Funktion $\partial_{ij} f := \partial_i \partial_j f = \partial_i (\partial_j f)$ heißen **partielle Ableitungen 2. Ordnung** von f. Weitere Bezeichnungen dafür sind:

$f_{x_j x_i}$ und

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} .$$

Beispiel: $f(x, y) = x^y$ auf $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$.

$f_x(x, y) = y\,x^{y-1}$;

$f_y(x, y) = x^y \ln x$;

$f_{xx}(x, y) = y\,(y-1)\,x^{y-2}$;

$f_{xy}(x, y) = x^{y-1}(1 + y \ln x)$;

$f_{yx}(x, y) = x^{y-1}(1 + y \ln x)$;

$f_{yy}(x, y) = x^y (\ln x)^2$.

Im Allgemeinen: $f_{xy} \neq f_{yx}$!

Satz von Schwartz: Die Funktion f besitze in einer Umgebung von $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ die partiellen Ableitungen $\partial_i f$, $\partial_j f$ und $\partial_{ji} f$. Ferner sei $\partial_{ji} f$ in $\vec{a}$ stetig.
Dann existiert auch $\partial_{ij} f(\vec{a})$, und es gilt:

$$\partial_{ij} f(\vec{a}) = \partial_{ji} f(\vec{a}) .$$

Beweisskizze: Beruht auf 2-dimensionales Analogon des Mittelwertsatzes der Differenzialrechnung einer Veränderlichen. Siehe Königsberger.

Definition: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ heißt **k-mal stetig differenzierbar** oder auch C^k-Funktion, $k \geq 2$, wenn alle partiellen Ableitungen $\partial_{i_1} \dots \partial_{i_k} f$ k-ter Ordnung auf U existieren und stetig sind.
Den Vektorraum der C^k-Funktionen auf U bezeichnet $C^k(U)$. Man definiert $C^\infty(U) := \bigcap_{k=1}^{\infty} C^K(U)$.

Lineare Differenzialoperatoren

Ersetzt man in Polynom P

$$P(x) = \sum_{k_1 \dots k_n} \underbrace{a_{k_1 \dots k_n}}_{\in \mathbb{C}} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$$

die Veränderlichen x_i durch ∂_i, so entsteht ein **linearer Differenzialoperator** $P(D)$ mit konstanten Koeffizienten. P Grad k, so definiert man eine lineare Abbildung

$$P(D) : C^k(U) \to C(U)$$
$$P(D) f := \sum a_{k_1 \dots k_n} \partial_1^{k_1} \dots \partial_n^{k_n} f$$

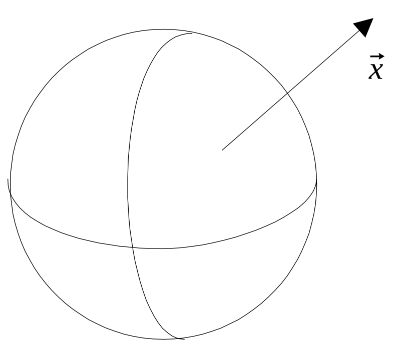
Dabei

$$\partial_i^P = \underbrace{\partial_i \partial_i \partial_i \dots \partial_i}_{\text{p-mal}}.$$

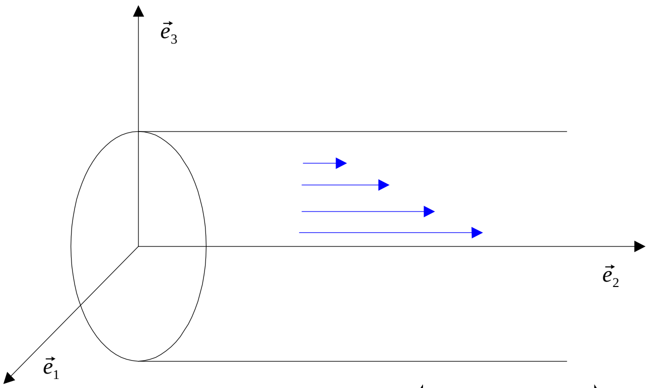
Definition: Ein **Skalarenfeld** $f : U \to \mathbb{R}$ $U \subset \mathbb{R}^n$ ordnet jedem $\vec{x} \in U$ eine reelle Zahl $f(\vec{x})$ zu.
Ein **Vektorfeld** ist $\vec{v} : U \to \mathbb{R}^n$ $(n > 1)$, die jedem Punkt $\vec{x} \in U$ ein $\vec{v}(\vec{x}) \in \mathbb{R}^n$ zuordnet.
Eine Kurve in U heißt **Feldlinie** des Vektorfeldes $\vec{v}$, wenn $\vec{v}(\vec{x})$ in jedem Kurvenpunkt $\vec{x}$ parallel zur Kurventangente ist.
Man spricht von einem **C^r-Skalarenfeld** f bzw. einem **C^r-Vektorfeld** $\vec{v}$ auf U, wenn f bzw. $\vec{v}$ C^r-Funktionen sind.

Beispiel: $n = 3$;

1) Zentrales Kraftfeld: $\vec{K}(\vec{x}) = \frac{c}{|\vec{x}|^3} \vec{x} \quad \vec{x} \neq 0$



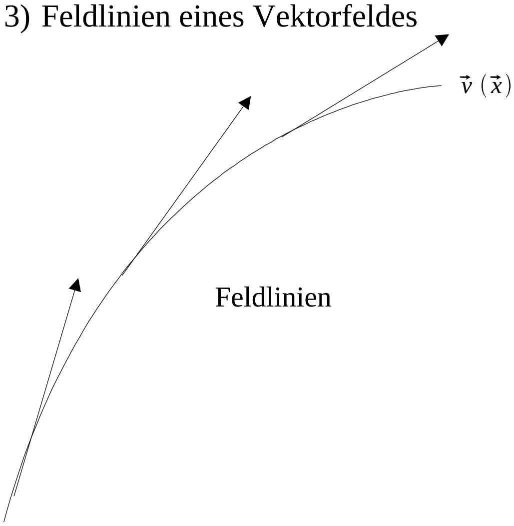
2) Laminare Rohrströmung



$$\vec{v}(\vec{x}) = \vec{v}(x_1, x_2, x_3) = c \begin{pmatrix} 0 \\ R^2 - x_1^2 - x_3^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit $x_1^2 + x_3^2 \leq R^2$, $c > 0$.

3) Feldlinien eines Vektorfeldes



Definition: Jedem C^1-Skalarfeld $f : U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ wird das Vektorfeld **Gradient** zugeordnet:

grad $f : U \to \mathbb{R}^n$,

$$\operatorname{grad} f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}) \end{pmatrix}.$$

Jedem C^2-Skalarenfeld $f : U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ wird mit dem **Laplace-Operator** Δ das Skalarenfeld Δf zugeordnet:

$\Delta : U \to \mathbb{R}^1$,

$$\Delta\ f\,(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^{2f}}{\partial\ x_i^2}\,(\vec{x})\ .$$

Zu jedem C^1-Vektorfeld $\vec{v} : U \to \mathbb{R}^n$ definiert man ein Skalarenfeld **Divergenz** $\operatorname{div}\ \vec{v}$ und ein Vektorfeld **Rotation** $\operatorname{rot}\ \vec{v}$.

$\operatorname{div}\ \vec{v} : U \to \mathbb{R}$,

$$\operatorname{div}\ \vec{v}\,(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\ v_i}{\partial\ x_i}\,(\vec{x})\ ,$$

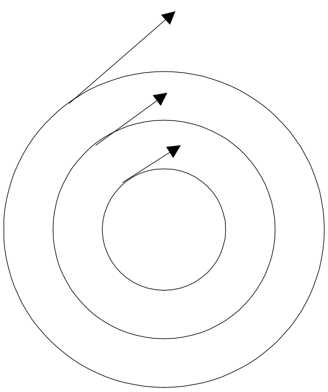
$\operatorname{rot}\ \vec{v} : U \to \mathbb{R}^n$,

$$\operatorname{rot}\ \vec{v}\,(\vec{x}) = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \cdots & \vec{e}_n \\ \frac{\partial}{\partial_{x_1}} & \frac{\partial}{\partial_{x_2}} & \cdots & \frac{\partial}{\partial_{x_n}} \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{vmatrix} \quad \text{(Determinante)}$$

Speziell $\mathbb{R}^3$:

$$\operatorname{rot}\ \vec{v}\,(\vec{x}) = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial_x} & \frac{\partial}{\partial_y} & \frac{\partial}{\partial_z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \vec{e}_1 \left(\frac{\partial\ v_z}{\partial\ y} - \frac{\partial\ v_y}{\partial\ z} \right) - \vec{e}_2 \left(\frac{\partial\ v_z}{\partial\ x} - \frac{\partial\ v_x}{\partial\ z} \right) + \vec{e}_3 \left(\frac{\partial\ v_y}{\partial\ x} - \cdot \right.$$

;



Beispiel: $\vec{v}\,(\vec{x}) = \omega\ \vec{a} \times \vec{x}$, $\vec{a} = const$

$$\operatorname{div}\ \vec{v}\,(\vec{x}) = \underbrace{\frac{\partial\ v_x}{\partial\ x}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial\ v_y}{\partial\ y}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial\ v_z}{\partial\ z}}_{=0} = 0\ ;$$

$$\operatorname{rot}\ \vec{v} = \begin{pmatrix} \omega\ \vec{e}_1\,(a_y\ z - a_z\ y) \\ -\omega\ \vec{e}_2\,(a_x\ z - a_z\ x) \\ \omega\ \vec{e}_3\,(a_x\ y - a_y\ x) \end{pmatrix} = 2\ \omega\ \vec{a}\ ;$$

$\operatorname{rot}\ \operatorname{grad}\ f = 0$;

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{e}_1\,(a_2\,b_3-b_2\,a_3)\\ -\vec{e}_2\,(a_1\,b_3-b_1\,a_3)\\ \vec{e}_3\,(a_1\,b_2-b_1\,a_2)\end{pmatrix};$$

$$\vec{a}\times\vec{x}=\begin{vmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ a_x & a_y & a_z\\ x & y & z\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{e}_1\,(a_y\,z-y\,a_z)\\ -\vec{e}_2\,(a_x\,z-x\,a_z)\\ \vec{e}_3\,(a_x\,y-x\,a_y)\end{pmatrix};$$

$$\operatorname{rot}\,\vec{v}\,(\vec{x})=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\,v_z}{\partial\,y}-\dfrac{\partial\,v_y}{\partial\,z}\\ \dfrac{\partial\,v_x}{\partial\,z}-\dfrac{\partial\,v_z}{\partial\,x}\\ \dfrac{\partial\,v_y}{\partial\,x}-\dfrac{\partial\,v_x}{\partial\,y}\end{pmatrix};$$

$$\frac{\partial\,v_z}{\partial\,y}=\frac{\partial}{\partial\,y}\,(a_x\,y-a_y\,x)=a_x;$$
$$\frac{\partial\,v_y}{\partial\,z}=\frac{\partial}{\partial\,z}\,(a_z\,x-a_x\,z)=-a_x;$$
$$\frac{\partial\,v_x}{\partial\,z}=\frac{\partial}{\partial\,z}\,(a_y\,z-a_z\,y)=a_y;$$

Bemerkung**:* $\operatorname{rot}\,\vec{v}=0 \;\Leftrightarrow$ ***wirbelfreies Feld

Beispiel: Die Wellengleichung hat die Form

$$\frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2\,\Phi}{\partial\,t^2}=\Delta\,\Phi=\frac{\partial^2\,\Phi}{\partial\,x^2}+\frac{\partial^2\,\Phi}{\partial\,y^2}+\frac{\partial^2\,\Phi}{\partial\,z^2};\;\Phi=A\,e^{i\,\vec{k}\cdot\vec{x}-i\,\omega\,t};$$

***Bemerkung**:* $\left(\dfrac{1}{c^2}\,\dfrac{\partial^2}{\partial\,t^2}-\Delta\right)\Phi=0;$

Bemerkung**:* $\Delta\,\Phi=0$ *heißt* ***Potenzialgleichung

Berechnung von Δf für radialsymmetrische Funktionen

Sei f eine C^2-Funktion auf einem Intervall $I\subset(0,\infty)$ und

$$f\,(\vec{x}):=F\left(\|\vec{x}\|_2\right)\qquad \vec{x}\in K\,(I)\subset\mathbb{R}^n$$

Mit $r:=\|\vec{x}\|_2$ gilt:

$$\partial_\nu\,f\,(\vec{x})=F'\,(r)\,\frac{x_\nu}{r};$$

$$\partial_\nu^2\,f\,(\vec{x})=F''\,(r)\,\frac{x_\nu}{r}\,\frac{x_\nu}{r}+F'\,(r)\left(\frac{1}{r}-\frac{x_\nu^2}{r^3}\right);$$

$$\frac{\partial}{\partial\,x_\nu}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{x_\nu}{r^3};$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}}\right)=-\frac{1}{2}(\ldots)^{-\frac{3}{2}}\,2\,x_\nu=-\frac{x_\nu}{r^3};$$

$$r=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}=(x_1^2+\ldots+x_n^2)^{\frac{1}{2}};$$

$$r^3=(\ldots)^{\frac{3}{2}};$$

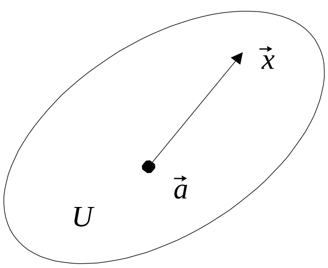
$$\boxed{\Delta\, f(\vec{x})=F''(r)+\frac{n-1}{r}\,F'(r);}$$

2.5 Taylorapproximation

Sei $f: U\to\mathbb{R}$ eine C^{P+1}-Funktion, $U\subset\mathbb{R}^n$ offen. Seien $\vec{a},\vec{x}\in U$ Punkte derart, dass die Verbindungsstrecke in U liegt. Sei ferner

$F:[0,1]\to\mathbb{R}$ mit

$F(t):=f(\vec{a}+t\,\vec{h}),\ \vec{h}:=\vec{x}-\vec{a}$



Es zeigt sich, dass F eine C^{P+1}-Funktion ist auf $[0,1]$. Nach der Taylorformel für Funktionen einer Veränderlichen gilt:

$$F(1)=F(0)+F'(0)+\frac{1}{2}F''(0)+\ldots+\frac{1}{P!}F^{(P)}(0)+R_{P+1};$$

Durch wiederholte Anwendung der Kettenregel folgt:

$$F'(t)=\sum_{i=1}^{n}\partial_i\, f(\vec{a}+t\,\vec{h})\,h_i;$$

$$F''(t)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\partial_j\,\partial_i\, f(\vec{a}+t\,\vec{h})\,h_i\,h_j;$$

$$F^{(k)}(t)=\sum_{i_1=1}^{n}\ldots\sum_{i_k=1}^{n}\partial_{i_1}\ldots\partial_{i_k}\, f(\vec{a}+t\,\vec{h})\,h_{i_1}\ldots h_{i_k};$$

Einschub*: Wenn eine Formel über mehrere Zeilen geht, gibt es folgende Konvention: Man trennt die Formel nur bei Operatoren der vier Grundrechnungsarten (Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division), der Operator steht am Anfang der neuen Zeile (aber nicht am Ende der alten Zeile).*

Bezeichnung: $\forall\ \vec{u} \in U \subset \mathbb{R}^n$ und $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ setzen wir:

$$\mathrm{d}^k f(\vec{u})\, \vec{x}^k := \sum_{i_1=1}^{n} \dots \sum_{i_k=1}^{n} \partial_{i_1} \dots \partial_{i_k} f(\vec{a})\, x_{i_1} \dots x_{i_k} .$$

$\mathrm{d}^k f(\vec{u})\, \vec{x}^k$ ist ein homogenes Polynom vom Grad k (oder Null) und heißt **Differenzial k-ter Ordnung** von f in $\vec{u}$.

Speziell ist:

$\mathrm{d}^1 f(\vec{u})\, \vec{x} = \mathrm{d} f(\vec{u}) \cdot \vec{x}$ und

$\mathrm{d}^0 f(\vec{u})\, \vec{x}^0 := f(\vec{u})$;

Dann gilt:

$F^{(k)}(t) = \mathrm{d}^k f(\vec{a} + t\, \vec{h})\, \vec{h}^k$.

Definition: Taylorpolynom p-ter Ordnung auf f in $\vec{a}$ ist:

$$T_p f(\vec{x}; \vec{a}) := \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} \mathrm{d}^k f(\vec{a})\, (\vec{x} - \vec{a})^k .$$

Satz (Taylorformel und Restglied): Ist $f: U \to \mathbb{R}$ eine C^{p+1}-Funktion, und sind $\vec{a}, \vec{x} \in U$ Punkte, deren Verbindungsstrecke in U liegt, so gilt:

$f(\vec{x}) = T_p f(\vec{x}; \vec{a}) + R_{p+1}(\vec{x}; \vec{a})$,

wobei das Restglied mit einem geeigneten $\vec{\xi} \in [\vec{a}, \vec{x}]$ in der Form

$$R_{p+1}(\vec{x}; \vec{a}) = \frac{1}{(p+1)!} \mathrm{d}^{p+1} f(\vec{\xi})\, (\vec{x} - \vec{a})^{p+1}$$

dargestellt werden kann.

$\partial_i v_j - \partial_j v_i$;

$$T_p f(\vec{x}; \vec{a}) = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} \mathrm{d}^k f(\vec{a})\, (\vec{x} - \vec{a})^k ;$$

Taylorpolynom 2. Ordnung

Definition: Für eine C^2-Funktion $f(\vec{x})$ heißt die durch

$$\mathrm{d}^2 f(\vec{a})\, \vec{x}^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \partial_{ij} f(\vec{a})\, x_i\, x_j$$

definierte quadratische Funktion die **Hesse-Form** von $f(\vec{x})$ in $\vec{x} = \vec{a}$ und die symmetrische $n \times n$-Matrix

$$\vec{f}''(\vec{a}) = H_f(\vec{a}) := \begin{pmatrix} \partial_{11} f(\vec{a}) & \cdots & \partial_{1n} f(\vec{a}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial_{n1} f(\vec{a}) & \cdots & \partial_{nn} f(\vec{a}) \end{pmatrix};\ \partial_{ij} f = \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j} \right|_{\vec{x} = \vec{a}} ;$$

die **Hesse-Matrix**.

Sie heißt auch die **2. Ableitung** von f in $\vec{a}$ (so wie $\vec{f}'(\vec{a})$ die 1. Ableitung heißt).

$\mathrm{d}^2 f(\vec{a})\, \vec{x}^2 = \vec{x}^T \cdot \vec{f}''(\vec{a}) \cdot \vec{x}$;

$$T_2 f(\vec{x}; \vec{a}) = f(\vec{a}) + \underbrace{\vec{f}\,'(\vec{a}) \cdot (\vec{x} - \vec{a})}_{=\text{grad } f(\vec{a}) \cdot (\vec{x} - \vec{a})} + \frac{1}{2} (\vec{x} - \vec{a})^T \cdot \vec{f}\,''(\vec{a}) \cdot (\vec{x} - \vec{a});$$

Beispiel: $f(x, y) = x^y$. Wollen Taylorpolynom 2. Ordnung im Punkt $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\vec{f}\,'(1,1) = \left(f_x(1,1), f_y(1,1)\right) = \left(y\, x^{y-1}, x^y \ln x\right)_{(1,1)} = (1, 0);$$

$$\vec{f}\,''(1,1) = \begin{pmatrix} f_{xx}(1,1) & f_{xy}(1,1) \\ f_{yx}(1,1) & f_{yy}(1,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$f_{xx} = y(y-1)\, x^{y-2}; \quad f_{xx}(1,1) = 0;$$

$$T_2 f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 1 + (1, 0) \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix}$$

$$= 1 + x - 1 + \frac{1}{2}(x-1, y-1) \begin{pmatrix} y-1 \\ x-1 \end{pmatrix} = 1 + x - 1 + \frac{1}{2}(x-1)(y-1) + \frac{1}{2}(y-1)(x-1)$$

$$= x + (x-1)(y-1);$$

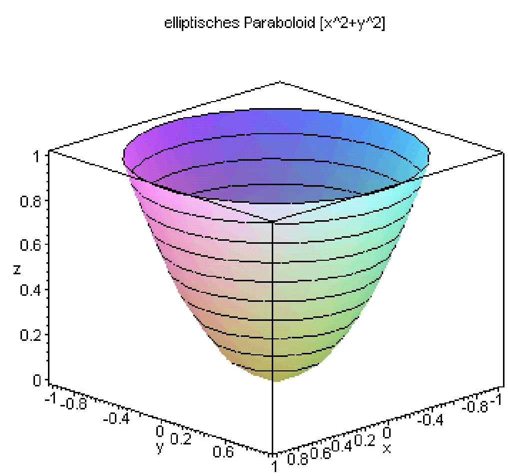
2.6 Bedeutung der 2. Ableitung

2. Ableitung $\neq$ Krümmung

Durch Betrachten der sogenannten **Schmiegquadrik** an den Graphen f in $\left(\vec{a}, vf(\vec{a})\right)$,
$x_{n+1} = T_2 f(\vec{x}, \vec{a})$,
kann man den Verlauf einer Funktion in Umgebung eines Punktes $\vec{a}$ klassifizieren.

z.B. $n = 2$: $f(x, y)$ kann eine Funktion **lokal** die Form

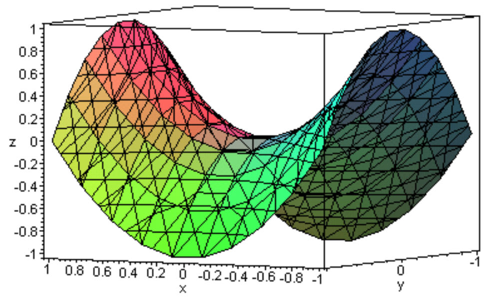
(1)eines **ellipischen Paraboloids**



(es geht in alle Richtungen rauf; der Querschnitt ist elliptisch)

(2)eines **hyperbolischen Paraboloids**

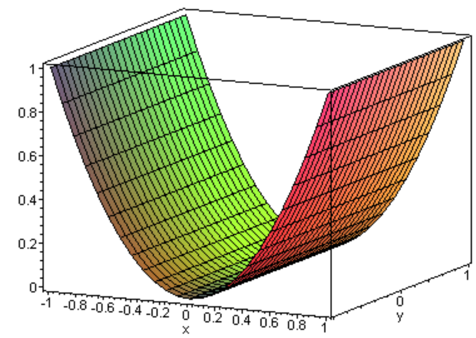
hyperbolisches Paraboloid [x^2-y^2]



(es geht in zwei Richtungen rauf und in zwei Richtungen runter – es entsteht eine Sattelform, der Querschnitt ist hyperbelförmig)

(3)eines **parabolischen Zylinders** haben oder

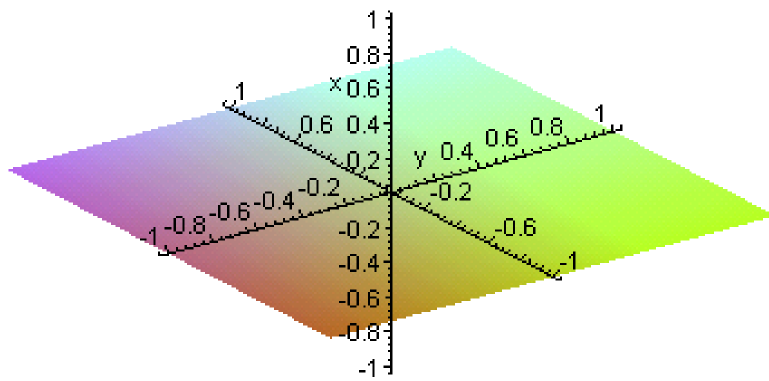
parabolischer Zylinder [x^2]



(es geht nur in zwei Richtungen nach oben, der Rest ist flach)

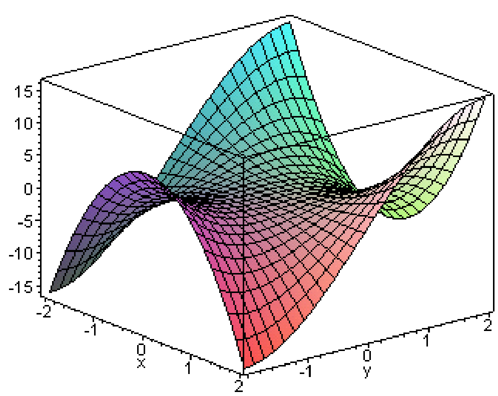
(4)flach sein

Ebene [x]



z.B. der Graph mit einem Flachpunkt in $(0\ ,\ 0)$, der überall hyperbolisch ist:
$f\ (x\ ,\ y) = 3\ x^2\ y - y^3$ „**Affensattel**“:

Affensattel [3 * x^2 * y - y^3]



Lokale Maxima und Minima

Definition: Sei $f\ :\ X \rightarrow \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^n$. Man sagt, f hat in $\vec{a} \in X$ ein lokales Maximum bzw. Minimum, wenn es in X eine Umgebung V von $\vec{a}$ gibt, so dass $f\ (\vec{x}) \leq f\ (\vec{a})$ bzw. $f\ (\vec{x}) \geq f\ (\vec{a})$ $\forall\ \vec{x} \in V$. Wenn V so gewählt werden kann, dass diese Beziehungen ohne '=' gelten $\forall\ \vec{x} \in V \setminus \{\vec{a}\}$, so heißt $\vec{a}$ **isoliertes lokales Maximum** oder **Minimum**.

Notwendiges Kriterium: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Hat $f: U \to \mathbb{R}$ in $\vec{a}$ ein lokales Extremum und ist f in $\vec{a}$ partiell differenzierbar, so gilt:
$\partial_1 f(\vec{a}) = \ldots = \partial_n f(\vec{a}) = 0$.
Für eine in $\vec{a}$ differenzierbare Funktion f besagt dies, dass $\mathrm{d} f(\vec{a}) = 0$. Eine solche Funktion heißt **stationär in $\vec{a}$** .

Beweis: Die durch $F(t) := f(\vec{a} + t\,\vec{e}_k)$ in einem hinreichend kleinen Intervall um $0 \in \mathbb{R}$ erklärte Funktion hat in $t = 0$ ein lokales Extremum. Also ist $F'(0) = 0$. Damit folgt:
$\partial_h f(\vec{a}) = F'(0) = 0$. q.e.d.

Daher hat eine differenzierbare Funktion auf einer offenen Menge **höchstens** an stationären Stellen lokale Extrema. Ist aber f in $\vec{a}$ stationär und hyperbolisch, so hat f einen Sattelpunkt und kein Extremum.

Satz (hinreichendes Kriterium): Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $f: U \to \mathbb{R}$ eine C^2-Funktion mit $\vec{f}\,'(\vec{a}) = 0$. Dann gilt:

($\det \vec{f}\,''(\vec{a}) > 0$ und $f_{xx}(\vec{a}) > 0$)
$\Leftrightarrow$ alle Eigenwerte der Matrix $\vec{f}\,''(\vec{a}) > 0$
$\Rightarrow$ f hat in $\vec{a}$ ein isoliertes lokales Minimum.

($\det \vec{f}\,''(\vec{a}) < 0$ und $f_{xx}(\vec{a}) > 0$)
$\Leftrightarrow$ alle Eigenwerte der Matrix $\vec{f}\,''(\vec{a}) < 0$
$\Rightarrow$ f hat in $\vec{a}$ ein isoliertes lokales Maximum.

($\det \vec{f}\,''(\vec{a}) < 0$)
$\Leftrightarrow$ $\vec{f}\,''(\vec{a})$ hat positive und negative Eigenwerte
$\Rightarrow$ f hat in $\vec{a}$ kein lokales Extremum (Sattelpunkt).

(die Bedingung in Klammern gilt nur für $\mathbb{R}^2$!)

Beweis: Königsberger, $\vec{x}^T \cdot \vec{f}\,'' \cdot \vec{x}$.

3. Differenzierbare Abbildungen

Betrachten vektorwertige Abbildungen $\vec{f}(\vec{x})$, $\vec{f}: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Besonders lineare Abbildungen $A: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ (das sind $m \times n$ -Matrizen) spielen dabei eine wichtige Rolle.

Begriff der Operatornorm:

0. (1.3) Lineare Abbildungen im $K^n \to K^m$, Operatornorm

Wir haben unter 1.3 erwähnt, dass jede lineare Abbildung $K^n \to K^m$ stetig ist. Dagegen kann eine lineare Abbildung eines unendlichdimensional-normierten Vektorraums (wie $C^1[0,1]$) V in einen normierten Vektorraum W durchaus unstetig sein.

Beispiel: Die Differenziation
$D: C^1[0,1] \to \mathbb{C}$, $D\, f := f'(0)$
ist in dem mit der Supremumsnorm versehenen Raum $C^1[0,1]$ nicht stetig. Denn die Normen der Funktionen $f_n(x) := \dfrac{\sin n^2 x}{n}$
bilden eine Nullfolge, aber die Folge der Ableitungen $f'_n(x) = n \cos n^2 x$, insbesondere $f'_n(0) = n$, divergieren:
$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \to 0$;
$\lim\limits_{n\to\infty} f'_n(0) \to \infty$;

Lemma: Es seien V, W normierte Vektorräume. Eine lineare Abbildung $A: V \to W$ ist genau dann stetig, wenn
$\exists\, C \in \mathbb{R} \vdots\ \forall\, x \in V: \ \|A\,x\| \le C\,\|x\|$.

Beweis: Folgt aus der Definition der Stetigkeit und ε - δ -Kriterium. Siehe Königsberger.

Definition (Operatornorm): V, W seien normierte Vektorräume über K und $L(V,W)$ sei der Vektorraum der stetigen K-linearen Abbildungen von V in W.
Man nennt lineare Abbildungen auch **lineare Operatoren**, stetige lineare Abbildungen auch **beschränkte lineare Operatoren**.
Für eine stetige lineare Abbildung $A: V \to W$ definiert man die **Operatornorm** :
$\|A\|_{L(V,W)} := \sup\{\|A\,x\| \mid x \in V, \|x\| \le 1\}$.

Man schreibt nur $\|A\|$. Nach Lemma $\|A\| < \infty$. Geometrisch ist $\|A\|$ der größte „Dehnungskoeffizient“ der Abbildung A.

__Bemerkung__: Wegen der Linearität der Abbildung ist $\|A\| > 0$ für $A \ne 0$, $\|\alpha\, A\| = |\alpha|\,\|A\|$ weil $\|x\| \ne 1 \ \Rightarrow\ \|(A+B)\,x\| \le \|A\,x\| + \|B\,x\| \le \|A\| + \|B\|$

Eigenschaften der Operatornorm:

1. $\forall\, x \in V$ gilt $\|A\,x\| \le \|A\|\,\|x\|$
2. $U \xrightarrow{B} V \xrightarrow{A} W$ mit U, V, W normierten Vektorräumen und A, B stetige lineare Operatoren.
   Dann gilt die **multiplikative Dreiecksungleichung**
   $\|A\,B\| \le \|A\|\,\|B\|$

Beweis: $\forall\ x \in U$ ist $\|x\| \leq 1$ folgt
$\|A \underbrace{B\ x}_{y}\| \leq \|A\|\ \|B\ x\| \leq \|A\|\ \|B\|\ \|x\| \leq \|A\|\ \|B\|$

Beispiel: $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$ mit Maximumsnorm. Ist (A_{ij}) die Matrix des Operators $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ bezüglich der Standardbasen, so gilt:

$$\|A\| = \max \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \ .$$

Den Vektorraum $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ identifizieren wir mit $\mathbb{R}^{m \times n}$ der $m \times n$-Matrizen mit Elementen in $\mathbb{R}$. Dabei wird die Operatornorm auf $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ auch als Norm auf $\mathbb{R}^{m \times n}$ aufgefasst und dann auch als Operatornorm bezeichnet.

Lemma: Eine Folge von Matrizen $A_k \in \mathbb{R}^{m \times n}$ konvergiert in einer Operatornorm gegen die Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ genau dann, wenn sie komponentenweise konvergiert.

I. Differenzierbarkeit

Im Folgenden seien X, Y endlichdimensionale normierte Vektorräume über $K = \mathbb{R}$ oder $= \mathbb{C}$. Ferner sei $f : U \to Y$ eine Abbildung auf einer offenen Menge $U \subset X$.

Wichtigster Fall: $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^m$ mit je einer Norm und

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} : U \to \mathbb{R}^m,\ U \subset \mathbb{R}^n;\ \vec{f}(\vec{x}) : \vec{x} \in \mathbb{R}^n,\ \vec{f} \in \mathbb{R}^m;$$

Standardfall: Auf dem Vektorraum $L(X, Y)$ der K-linearen Abbildungen von X nach Y verwenden wir stets die von den Normen auf X und Y induzierten Operatornormen.

$$\|A\| = \sup \{\underbrace{\|A \overbrace{x}^{\in X}\|}_{\in Y}\}$$

Definition: $\vec{f} : U \to Y$ heißt **differenzierbar** oder **total differenzierbar** im Punkt $\vec{a} \in U$, wenn es eine K-lineare Abbildung $L : X \to Y$ gibt, derart, dass der durch
$\vec{f}(\vec{a} + \vec{h}) = \vec{f}(\vec{a}) + L\ \vec{h} + \vec{R}(\vec{h})$
in einer Umgebung von $0 \in X$ erklärte Rest $\vec{R}$ die Bedingung
$$\lim_{\vec{h} \to 0} \frac{\vec{R}(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = 0$$
erfüllt.

***Bemerkung**: Wie bei den Funktionen zeigt man, dass es nur eine solche Abbildung L gibt. Sie heißt das **Differenzial** oder die **Linearisierung** von $\vec{f}$ in $\vec{a}$ und wird mit $\mathrm{d}\ f(\vec{a})$ bezeichnet. Es gilt:*
*$\mathrm{d}\ f(\vec{a}) \in L(X, Y)$, d.h. bezüglich der Basen in X und Y kann $\mathrm{d}\ f(\vec{a})$ durch eine Matrix dargestellt werden. Diese heißt die **Funktionalmatrix** oder **Jacobi-Matrix** oder auch die **Ableitung** von $\vec{f}$ (oder **totale Ableitung**) in $\vec{a}$ und wird mit $f'(\vec{a})$ bezeichnet.*
*Falls $\dim X = \dim Y$, dann heißt $\det f'(\vec{a})$ die **Funktionaldeterminante** von $\vec{f}$ in $\vec{a}$.*

Beispiel: Jede lineare Abbildung $\vec{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $\vec{f}(\vec{x}) = A\,x$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, ist total differenzierbar. Die Jacobi-Matrix ist
$\overset{\leftrightarrow}{f}\,'(\vec{x}) = \overset{\leftrightarrow}{A} \quad \forall\ \vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

> **Lemma**: Eine Abbildung $\vec{f} : (\vec{f}_1, \vec{f}_2) : U \to Y_1 \times Y_2$ in eine direkte Summe ist genau dann differenzierbar in $\vec{a} \in U$, wenn dort $\vec{f}_1 : U \to Y_1$ und $\vec{f}_2 : U \to Y_2$ differenzierbar ist. Gegebenfalls ist $\mathrm{d}\,f(\vec{a}) = \left(\mathrm{d}\,f_1(\vec{a}), \mathrm{d}\,f_2(\vec{a})\right)$.

Beweis: Sei $\vec{f}_1, \vec{f}_2$ differenzierbar in $\vec{a}$. $i = 1, 2$.

$\vec{f}_i(\vec{a} + \vec{h}) = \vec{f}_i(\vec{a}) + \mathrm{d}\,f_i(\vec{a})\,\vec{h} + \vec{R}_i(\vec{h})$,

wobei $\vec{R}_i$ die Bedingung

$$\lim_{\vec{h} \to 0} \frac{\vec{R}_i(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = 0$$

erfüllt. Wir setzen:

$L\,\vec{h} := \left(\mathrm{d}\,f_1(\vec{a})\,\vec{h}, \mathrm{d}\,f_2(\vec{a})\,\vec{h}\right)$.

L ist die lineare Abbildung $X \to Y_1 \times Y_2$ und mit ihr gilt:

$$\vec{f}(\vec{a} + \vec{h}) = \vec{f}(\vec{a}) + L\,\vec{h} + \underbrace{\left(\vec{R}_1(\vec{h}), \vec{R}_2(\vec{h})\right)}_{:= \vec{R}(\vec{h})} .$$

$\vec{R}(\vec{h})$ erfüllt ebenfalls

$$\lim_{\vec{h} \to 0} \frac{\vec{R}(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = 0$$

$\Rightarrow$ $\vec{f}$ ist also differenzierbar in $\vec{a}$ und hat dort das Differenzial $\mathrm{d}\,f(\vec{a}) = L$. Umkehrung analog.

$Y_1 = \{\vec{x}\}$, $Y_2 = \{\vec{y}\}$; $Y_1 \times Y_2 = Y_1 \oplus Y_2 = \{(\vec{x}, \vec{y})\}$

> **Korollar**: Eine Abbildung $\vec{f} : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist genau dann in $\vec{a} \in U$ differenzierbar, wenn dort jede der Komponentenfunktionen $f_1, \dots, f_m$ differenzierbar ist. Gegebenfalls gilt für $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$:
>
> $\mathrm{d}\,f(\vec{a})\,\vec{h} = f'(\vec{a}) \cdot \vec{h}$,
>
> wobei die Funktional(Jacobi)-Matrix:
>
> $$\overset{\leftrightarrow}{f}\,'(\vec{a}) = \begin{pmatrix} \partial_1\, f_1(\vec{a}) & \cdots & \partial_n\, f_1(\vec{a}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial_1\, f_m(\vec{a}) & \cdots & \partial_n\, f_m(\vec{a}) \end{pmatrix} .$$

Beweis: Folgt aus der mehrmaligen Anwendung des Lemmas.

Gestalt der Jacobi-Matrix wegen der Differenziale der Komponenten
$\mathrm{d}\,f_\mu(\vec{a})\,\vec{h} = \partial_1\, f_\mu(\vec{a})\,h_1 + \ldots + \partial_n\, f_\mu(\vec{a})\,h_n = \mathrm{grad}\ f_\mu(\vec{a})\,\vec{h}$.

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}, \ f_i(\vec{x}) \qquad \vec{x} \in \mathbb{R}^n$$

Satz (Differenzierbarkeitskriterium): Eine Abbildung
$\vec{f} = (f_1, \dots, f_m)^T : U \to \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$
ist in $\vec{a} \in U$ differenzierbar, wenn alle $m \cdot n$ partiellen Ableitungen $\partial_\mu f_\mu$, $\nu = 1, \dots, n$ und $\mu = 1, \dots, n$ in einer Umgebung von $\vec{a}$ existieren und in $\vec{a}$ stetig sind.

Beweis: Folgt aus Korollar, in 2.1 aufgestellte Differenzierbarkeitskriterien.

Man kann das Differenzial wie früher mit Hilfe von Richtungsableitungen berechnen:
$$\mathrm{d}\, f(\vec{a})\, \vec{h} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left[\vec{f}(\vec{a} + t\, \vec{h}) - \vec{f}(\vec{a}) \right] =: \partial_{\vec{h}} \vec{f}(\vec{a}) .$$

$\partial_{\vec{h}} \vec{f}(\vec{a})$ heißt **Ableitung** von $\vec{f}$ in Richtung $\vec{h}$ im Punkt $\vec{a}$. Die Ableitungen eines in der Richtung einer festgewählten Basis $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ für X heißen wieder partielle Ableitungen und werden auch wieder mit $\partial_1 \vec{f}(\vec{a}), \dots, \partial_n \vec{f}(\vec{a})$ bezeichnet. Es gilt offensichtlich:

$$\overset{\leftrightarrow}{f'}(\vec{a}) = \begin{pmatrix} \operatorname{grad} f_1(\vec{a})^T \\ \vdots \\ \operatorname{grad} f_m(\vec{a})^T \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial x_1}(\vec{a}), \dots, \frac{\partial \vec{f}}{\partial x_n}(\vec{a}) \right) = \left(\partial_1 \vec{f}(\vec{a}), \dots, \partial_n \vec{f}(\vec{a}) \right) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\vec{a}) \right)$$
.

Beispiel 1: Polarkoordinaten

1.3 $\to$ $\vec{P}_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sind definiert durch
$$\vec{P}_2(r, \varphi) := \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}$$
und die Rekursionsformel
$$\vec{P}_{n+1}(r, \varphi_1, \dots, \varphi_n) := \begin{pmatrix} P_n(r, \varphi_1, \dots, \varphi_n) \cdot \cos \varphi_n \\ r \sin \varphi_n \end{pmatrix} .$$

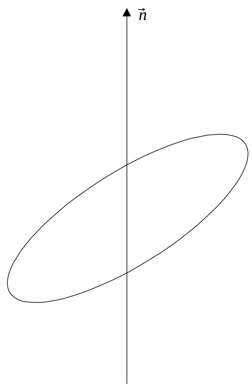
Funktionalmatrix von $\vec{P}_2$ lautet:
$$\overset{\leftrightarrow}{P'}_2(r, \varphi) = \left(\frac{\partial \vec{P}_2}{\partial r}, \frac{\partial \vec{P}_2}{\partial \varphi} \right) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix} .$$

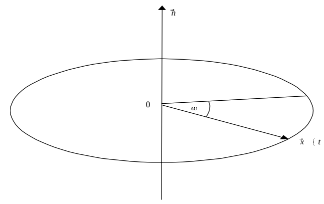
Ferner gelten die Rekursionsformeln:
$$\overset{\leftrightarrow}{P'}_{n+1} = \begin{pmatrix} \overset{\leftrightarrow}{P'}_n & & -\overset{\leftrightarrow}{P}_n \sin \varphi_n \\ \sin \varphi_n & \underbrace{0, \dots, 0}_{n-1} & r \cos \varphi_n \end{pmatrix}_{(n+1) \times (n+1)} .$$

Funktionaldeterminante:
$$\det \overset{\leftrightarrow}{P'}_2(r, \varphi) = r$$
und allgemein:
$$\det \overset{\leftrightarrow}{P'}_n = r^{n-1} \cos \varphi_2 \dots \cos^{n-2} \varphi_{n-1} .$$

Beispiel 2: Rechtsdrehung mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um eine Achse durch den

Nullpunkt mit Richtungsvektor $\vec{n} = (n_1 , n_2 , n_3)^T$, $|\vec{n}| = 1$, wird dargestellt durch $(\vec{x}_0 \equiv \vec{x}\,(t = 0))$:
$\vec{x}\,(t) = \cos\,\omega\,t\,\vec{x}_0 + (1 - \cos\,\omega\,t)\,(\vec{x}_0 \cdot \vec{n})\,\vec{n} + \sin\,\omega\,t\,\vec{n} \times \vec{x}_0$.





Für $\vec{v}\,(t) = \dot{\vec{x}}\,(t)$:

Behauptung: $\vec{v}\,(t) = \omega\,[-\sin\,\omega\,t\,\vec{x}_0 + \sin\,\omega\,t\,(\vec{x}_0 \cdot \vec{n})\,\vec{n} + \cos\,\omega\,t\,\vec{n} \times \vec{x}_0] = \omega\,\vec{n} \times \vec{x}\,(t)$.

Beweis: Es gilt die Identität
$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\,\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\,\vec{c}$, insbesondere
$\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{x}_0) = (\vec{n} \cdot \vec{x}_0)\,\vec{n} - \vec{x}_0$, außerdem
$\vec{n} \times ((\vec{x}_0 \cdot \vec{n})\,\vec{n}) = 0$.

Abbildung $\vec{x} \to \vec{v}\,(\vec{x}) = \omega\,\vec{n} \times \vec{x}$ ist eine lineare Abbildung
$\vec{x} \to \overset{\leftrightarrow}{V}\,\vec{x}$
mit konstanter Matrix
$\overset{\leftrightarrow}{V} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$,

daher gilt:
$\overset{\leftrightarrow}{x}'\,(t) = \overset{\leftrightarrow}{V} = \left(\vec{v}\,(\vec{e}_1)\,,\,\vec{v}\,(\vec{e}_2)\,,\,\vec{v}\,(\vec{e}_3)\right) \cdot$

$\vec{v}\,(\vec{e}_1) = \omega\,\vec{n} \times \vec{e}_1 = \omega\,\vec{e}_2\,n_3 - \omega\,\vec{e}_3\,n_2$

$$\Rightarrow\ \overset{\leftrightarrow}{V} = \omega \begin{pmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Definition (Klasse C^1): Eine Abbildung $\vec{f} : U \to Y$ auf einer offenen Menge $U \subset X$ heißt **stetig differenzierbar** in U, wenn
1. $\vec{f}$ in jedem Punkt $\vec{x} \in U$ differenzierbar ist
2. $\mathrm{d}\,f : U \to L\,(X\,,Y)$, $\vec{x} \to \mathrm{d}\,f\,(\vec{x})$ stetig ist.

Den Raum der stetig differenzierbaren Abbildungen $A \to Y$ bezeichnet man mit $C^1\,(A\,,Y)$.

Satz (Stetigkeitstest): Die Abbildung $\mathrm{d} f : U \to L(X, Y)$ ist genau dann stetig, wenn für alle $\vec{h} \in X$ die Abbildung

$$U \to Y, \; \vec{x} \to \mathrm{d} f(\vec{x}) \vec{h} = \partial_{\vec{h}} \vec{f}(\vec{x})$$

stetig ist.

Satz (Kriterium für C¹-Differenzierbarkeit): Eine Abbildung

$$\vec{f} = (f_1, \dots, f_m)^T : U \to \mathbb{R}^m, \; U \subseteq \mathbb{R}^n$$

ist genau dann differenzierbar, wenn alle Komponenten f_i stetig differenzierbar sind, und das ist nach 2.1 genau dann der Fall, wenn alle $m \cdot n$ partiellen Ableitungen $\partial_\nu f_\mu$ in U existieren und stetig sind.

Definition: Die Abbildung

$$\vec{f} : (f_1, \dots, f_m)^T : U \to \mathbb{R}^m, \; U \subset \mathbb{R}^n$$

heißt **k-mal stetig differenzierbar** in U, wenn alle Komponentenfunktionen $f_1, \dots, f_m$ k-mal stetig differenzierbar sind.

Den Raum nennt man $C^k(U, \mathbb{R}^m)$ und man setzt wieder:

$$C^\infty(U, \mathbb{R}^m) = \bigcap_{k=1}^{\infty} C^k(U, \mathbb{R}^m).$$

II. Rechenregeln

Es sei Z ein weiterer endlichdimensionaler normierter Vektorraum.

Kettenregel

In $V \xrightarrow{\vec{g}} U \xrightarrow{\vec{f}} Z$ (V offen in X, U offen in Y) sei $\vec{g}$ differenzierbar in $\vec{a} \in V$ und $\vec{f}$ differenzierbar in $\vec{b} := \vec{g}(\vec{a})$. Dann ist $\vec{f} \circ \vec{g}$ differenzierbar in $\vec{a}$ und es gilt:

$$\mathrm{d}(\vec{f} \circ \vec{g})(\vec{a}) = \mathrm{d} f(\vec{g}(\vec{a})) \circ \mathrm{d} g(\vec{a}).$$

Für die Jacobi-Matrix heißt das:

$$(\vec{f} \circ \vec{g})'(\vec{a}) = \overset{\leftrightarrow}{f}{}'(\vec{g}(\vec{a})) \cdot \overset{\leftrightarrow}{g}{}'(\vec{a}).$$

Beispiel: Sei $\vec{f} : U \to \mathbb{R}^n, U \subset \mathbb{R}^n$ differenzierbar. Weiter sei $\vec{g} : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung $\vec{g}(\vec{x}) = \overset{\leftrightarrow}{A} + \vec{b}$ mit $\det \overset{\leftrightarrow}{A} \neq 0$ („affine Abbildung"). Dann gilt für

$$\vec{F}(\vec{x}) : \vec{f}(\overset{\leftrightarrow}{A} \vec{x} + \vec{b})$$

$$\overset{\leftrightarrow}{F}{}'(\vec{x}) = \overset{\leftrightarrow}{f}{}'(\overset{\leftrightarrow}{A} \vec{x} + \vec{b}) \cdot \overset{\leftrightarrow}{A}.$$

Allgemeine Produktregel

An die Stelle der Multiplikation von Zahlen $K \times K \to K$ tritt jetzt eine bilineare Abbildung

$$\beta : Y_1 \times Y_2 \to Z,$$

wobei Y_1, Y_2, Z endlichdimensionale normierte Vektorräume sind.

Beispiele:

a) die Multiplikation $K \times Y \to Y$ einer Zahl mit einem Vektor

$$\left(x^2 \vec{f}(\vec{x})\right)'$$

b) die Skalarprodukte $Y \times Y \to \mathbb{R}$ im Falle $Y \subset \mathbb{R}$:

$$\vec{f}(\vec{x})\cdot\vec{g}(\vec{x}) = (\vec{f}, \vec{g}) = \sum_{i=1}^{m} f_i\, g_i\,;\ (\vec{f}\cdot\vec{g})\,'$$

c) Produkte von Matrizen bei passender Dimension, wie
$\overleftrightarrow{A}(\vec{x}), \overleftrightarrow{B}(\vec{x}) \to \overleftrightarrow{A}\cdot\overleftrightarrow{B}$ oder $\overleftrightarrow{A}\cdot\overleftrightarrow{B} - \overleftrightarrow{B}\,\overleftrightarrow{A}$

d) die Multiplikation $A \times A \to A$ in einer Matrizenalgebra A

Satz (Produktregel): Gegeben seien auf einer offenen Menge $U \subset X$ die Abbildungen $\vec{f}_1 : U \to Y_1$ und $\vec{f}_2 : U \to Y_2$ sowie die bilineare Abbildung $\beta : Y_1 \times Y_2 \to Z$.
Mittels β definieren wir ein verallgemeinertes Produkt
$\vec{f}_1 \otimes_\beta \vec{f}_2 : U \to Z$
$(\vec{f}_1 \otimes_\beta \vec{f}_2)(\vec{u}) := \beta(\vec{f}_1(\vec{u}), \vec{f}_2(\vec{u}))$.
Dann gilt: Sind $\vec{f}_1$ und $\vec{f}_2$ in $\vec{a} \in U$ differenzierbar, dann ist auch $\vec{f}_1 \otimes_\beta \vec{f}_2$ in $\vec{a}$ differenzierbar und für $\vec{h} \in X$ ist:
$\mathrm{d}\,(\vec{f}_1 \otimes_\beta \vec{f}_2)(\vec{a})\,\vec{h} = \beta(\mathrm{d}\ f_1(\vec{a})\,\vec{h}, \vec{f}_2(\vec{a})) + \beta(\vec{f}_1(\vec{a}), \mathrm{d}\ f_2(\vec{a})\,\vec{h})$.
Mit Funktionalmatrizen:
$(\vec{f}_1 \otimes_\beta \vec{f}_2)\,'(\vec{a})\cdot\vec{h} = \beta(\overleftrightarrow{f}_1\,'(\vec{a})\cdot\vec{h}, \vec{f}_2(\vec{a})) + \beta(\vec{f}_1(\vec{a}), \overleftrightarrow{f}_2\,'(\vec{a})\cdot\vec{h})\cdot$

Sind $\vec{f}_1$ und $\vec{f}_2$ stetig differenzierbar in U, dann ist es auch $\vec{f}_1 \otimes_\beta \vec{f}_2$.

Beispiel:
$\vec{f}_1(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ x\ y \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\,;\ \vec{f}_2(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\,;$
$\beta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,,\ (\vec{f}_1, \vec{f}_2) \to \vec{f}_1^{\,T}\cdot\vec{f}_2 = x\,(x^2 + y^2) + x\ y^2\,;$
$\overleftrightarrow{f}_1\,' = \left(\frac{\partial \vec{f}_1}{\partial x}, \frac{\partial \vec{f}_1}{\partial y}\right) = \begin{pmatrix} 2\,x & 2\,y \\ y & x \end{pmatrix}\,;$
$\overleftrightarrow{f}_2\,' = \left(\frac{\partial \vec{f}_2}{\partial x}, \frac{\partial \vec{f}_2}{\partial y}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\,;$
$\vec{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}\,;$
$\beta(\overleftrightarrow{f}_1\,'\cdot\vec{h}, \vec{f}_2) = \beta\left(\begin{pmatrix} 2\,x\,h_1 + 2\,y\,h_2 \\ y\,h_1 + x\,h_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = (2\,x^2 + y^2)\,h_1 + 3\,x\ y\,h_2\,;$
$\beta(\vec{f}_1, \overleftrightarrow{f'}_2\cdot\vec{h}_1) = \beta\left(\begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ x\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}\right) = h_1\,(x^2 + y^2) + h_2\,x\ y\,;$
$(\vec{f}_1 \otimes_\beta \vec{f}_2)\,'\cdot\vec{h} = \begin{pmatrix} 3\,x^2 + 2\,y^2 \\ 4\,x\ y \end{pmatrix}^T\cdot\vec{h}\,;$

Prüfung:
$g = \vec{f}_1\cdot\vec{f}_2 = (x^2 + y^2)\cdot x + x\ y^2 = x^3 + 2\,x\ y^2\,;$
$\partial_x(\vec{f}_1\cdot\vec{f}_2) = 3\,x^2 + 2\,y^2\,;$
$\partial_y(\vec{f}_1\cdot\vec{f}_2) = 4\,x\ y\,;$

$$\vec{g}\ ' = (\vec{f}_1 \cdot \vec{f}_2) = \begin{pmatrix} 3\ x^2 + 2\ y^2 \\ 4\ x\ y \end{pmatrix}^T$$

3.2 Schrankensatz

Zunächst verallgemeinern wir den Begriff der Supremumsnorm einer Funktion auf Abbildungen.

Sei K ein kompakter Raum, V normierter Vektorraum und $\varphi : K \to V$ eine stetige Abbildung. Man definiert dann:

Definition (Supremumsnorm): $\|\varphi\|_K := \sup \|\varphi(x)\| \quad x \in K$.
Dadurch wird eine Norm auf dem Vektorraum $C(K, V)$ der stetigen Abbildungen von K in V erklärt. Sie heißt die **Supremumsnorm** auf $C(K, V)$.

Es seien X, Y endlich-dimensionale normierte K-Vektorräume. Dann gilt:

Satz (Schrankensatz): Sei $f : K \to Y$ eine C^1-Abbildung auf einer kompakten, konvexen Menge $K \subset X$. Dann gilt für je zwei Punkte $x, y \in K$
$\|f(x) - f(y)\| \leq \|\mathrm{d}\ f\|_K \cdot \|x - y\|$.
Dabei ist $\|\mathrm{d}\ f\|_K$ die Supremumsnorm von $\mathrm{d}\ f : K \to L(X, Y)$ bezüglich K:
$\|\mathrm{d}\ f\|_K = \sup\limits_{\xi \in K} \|\mathrm{d}\ f(\xi)\|_{L(X, Y)}$.
Für den Sonderfall

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} : K \to \mathbb{R}^m,\ K \subset \mathbb{R}^n$$

ist

$$\|\mathrm{d}\ f\|_K = \sup_{\vec{\xi} \in K} \left(\max_{\mu} \sum_{\nu=1}^{n} \left|\partial_\nu\ f_\mu(\vec{\xi})\right| \right);$$

$$\left\|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{y})\right\|_\infty \leq \|\mathrm{d}\ f\|_K \cdot \|\vec{x} - \vec{y}\|_\infty;\ \|\vec{x}\|_\infty = \max\{|x_1| \ldots |x_n|\};$$

Beweis: Wird zurückgeführt auf Fälle mit Funktionen.

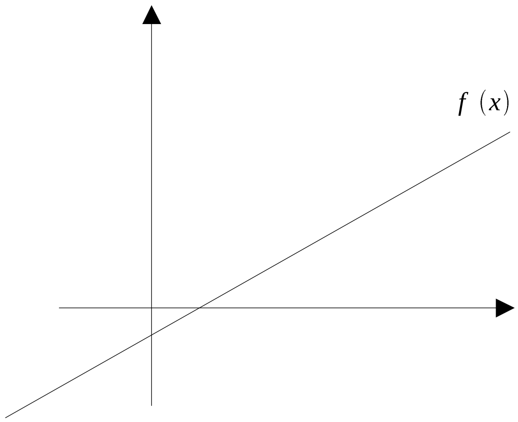
Definition: Eine Menge heißt **konvex**, wenn $\forall\ a, b \in X \ \Rightarrow\ [a, b] \in X$, wobei $[a, b] := \{a + t(b - a) | t \in [0, 1]\}$.

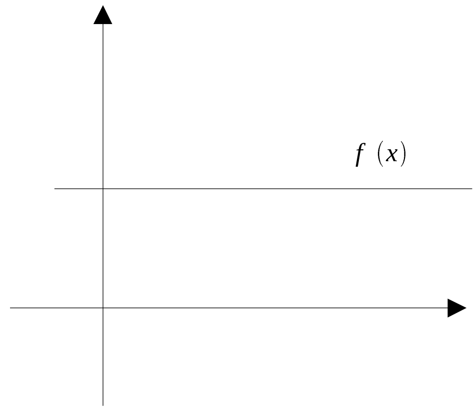
3.3 Diffeomorphismen

Es seien X, Y endlich-dimensionale, normierte Vektorräume.

Definition: Eine lineare Abbildung $f : X \to Y$ heißt **Isomorphismus**, wenn sie bijektiv ist.

Beispiel für eine lineare Abbildung, die kein Isomorphismus ist: Eine Funktion, die auf eine Konstante abbildet.





***Bemerkung**: Wenn f ein Isomorphismus ist, so ist f^{-1} eine lineare Abbildung.*

Definition: Eine bijektive C^1-Abbildung $f: U \to V$ einer offenen Menge $U \subset X$ auf eine offene Menge $V \subset Y$ heißt **Diffeomorphismus**, wenn die Umkehrabbildung $f^{-1}: V \to U$ ebenfalls eine C^1-Abbildung ist.

***Bemerkung**: Diffeomorphismen spielen in der Analysis eine ähnliche Rolle wie die Homöomorphismen in der Topologie. Sie werden oft benutzt, um Probleme durch geeignete Transformationen zu vereinfachen.*

Beispiel: Polarkoordinatenabbildung P_n ist diffeomorph, wenn man die Definitionsmengen wie in 1.3 wählt.

Elementare Eigenschaften von Diffeomorphismen

$f: U \to V$ sei ein Diffeomorphismus. g bezeichne seine Umkehrung. Dann bestehen die Identitäten
$g \circ f = 1_U$ und $f \circ g = 1_V$.

Aus diesen ergibt sich aufgrund der Kettenregel für die Differenziale $x \in U$ bzw. $y = f(x) \in V$:
$\mathrm{d}\, g(y) \circ \mathrm{d}\, f(x) = 1_X$
$\mathrm{d}\, f(x) \circ \mathrm{d}\, g(y) = 1_Y$.

Da d ein linearer Operator ist, folgt:

Satz:

1. X und Y haben die gleiche Dimension.
2. $\mathrm{d}\, g(y)$ und $\mathrm{d}\, f(x)$ sind zueinander inverse Isomorphismen:
   $\mathrm{d}\, g(y) = (\mathrm{d}\, f(x))^{-1}$
   oder ausgedrückt durch Jacobimatrizen:
   $\overset{\leftrightarrow}{g}'(y) = \left(\overset{\leftrightarrow}{f}'(x)\right)^{-1}$.

Eine C^1-Abbildung $f: U \to V$ ist demnach nur ein Diffeomorphismus, wenn alle Differenziale $\mathrm{d}\, f(x)$, $x \in U$, Isomorphismen sind. Im Falle $X = Y = \mathbb{R}^n$ bedeutet das, dass alle Ableitungen $\overset{\leftrightarrow}{f}'(\vec{x})$, $\vec{x} \in U$, invertierbar sind.

Im $\mathbb{R}^1$ gilt automatisch Isomorphismus $\rightarrow$ Diffeomorphismus, denn wenn $f \in C^1$ und $f : I \rightarrow J$ surjektiv ist, hat f' ein einheitliches Vorzeichen; f ist streng monoton und die Umkehrfunktion nach den Regeln für die Differenziation von Umkehrfunktionen stetig differenzierbar.

Satz: Sei $f : U \rightarrow V$ eine C^1-Abbildung einer offenen Menge $U \subset X$ auf eine offene Menge $V \subset Y$ mit den beiden Eigenschaften:
1. Jedes Differenzial $\mathrm{d}\, f(x) \ \forall\ x \in U$ ist ein Isomorphismus.
2. f besitzt eine stetige Umkehrung $g : V \rightarrow U$

Dann ist f ein Diffeomorphismus, d.h $f^{-1} \in C^1$.

Beweis: Zeigen zunächst, dass $g\ \forall\ y \in V$ differenzierbar ist:
Sei dazu $k \in Y$ derart gewählt, dass auch $y + k \in V$. Wir setzen:
$x := g(y)$, $h := g(y+k) - g(y)$.
Da f in $x \in U$ differenzierbar ist, gilt:
(*) $f(x+h) = f(x) + \mathrm{d}\, f(x)\, h + R(h)$
mit

$$\lim_{h \to 0} \frac{R(h)}{\|h\|} = 0 .$$

Hieraus folgt mit der Invertierbarkeit von $\mathrm{d}\, f$ und wegen $f \circ g = 1_X$:

$$\underbrace{f(g(y+k))}_{=y+k} = \underbrace{f(g(y))}_{=y} + \mathrm{d}\, f(x)\,[g(x+k) - g(y)] + R(h) .$$

(**) $$g(y+k) = g(y) + (\mathrm{d}\, f(x))^{-1}\, k + R^*(k)$$ mit

$R^*(k) := -(\mathrm{d}\, f(x))^{-1}\, R(g(y+k) - g(y))$.
Nun zeigt man mit Abschätzungen, die die Stetigkeit von g ausnützen, dass

$$\lim_{k \to 0} \frac{R^*(k)}{\|k\|} = 0 .$$

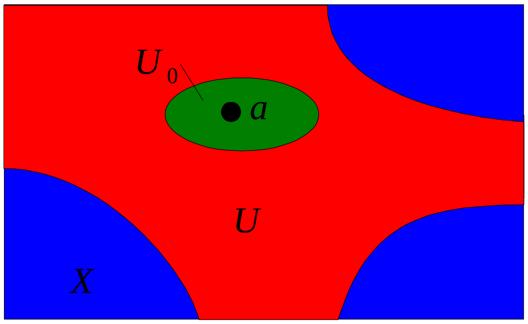
Das beweist die Differenzierbarkeit von g. Wir müssen noch zeigen, dass g stetig differenzierbar ist.
Aus (**) folgt für $\mathrm{d}\, g$ die Darstellung

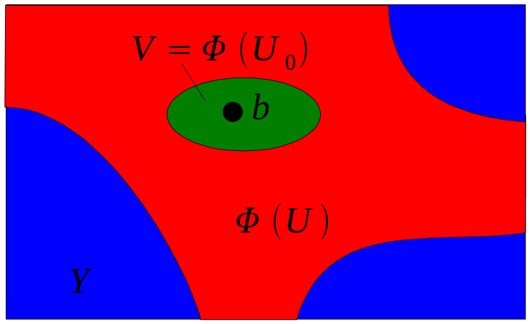
$$\mathrm{d}\, g(y) = [\mathrm{d}\, f(g(y))]^{-1} .$$

Also ist die Zusammensetzung der Abbildungen g, $\mathrm{d}\, f$ und Inversion. Da diese stetig sind, ist auch $\mathrm{d}\, g$ stetig. q.e.d.

3.4 Satz über die lokale Umkehrbarkeit

Bisher nur globale Aussagen. Es zeigt sich aber, dass jede C^1-Abbildung, deren Differenzial an einer Stelle umkehrbar ist, ein einer kleinen Umgebung dieser Stelle ein Diffeomorphismus ist.





$f \mid U_0 : U_0 \underset{\text{diffeomorph}}{\to} V$

3.4 Satz über die lokale Umkehrbarkeit

Satz: X , Y seien endlichdimensionale normierte Vektorräume. Es sei $f : U \to Y$ eine C^1 -Abbildung auf eine offene Menge $U \subset X$.
Im Punkt $a \in U$ sei das Differenzial $\mathrm{d}\, f(a) : X \to Y$ ein Isomorphismus.
Dann gibt es eine offene Umgebung $U_0 \subset U$ um a derart, dass $V := f(U_0)$ eine offene Umgebung von $b = f(a)$ ist und die eingeschränkte Abbildung $f : U_0 \to V$ ein Diffeomorphismus. Die Umkehrabbildung $g : V \to U_0$ hat in b das Differenzial

$$\mathrm{d}\, g(b) = (\mathrm{d}\, f(a))^{-1}$$

und im Fall $X = Y = \mathbb{R}^n$ die Funktionalmatrix

$$\overset{\leftrightarrow}{g}'(\vec{b}) = \left[\overset{\leftrightarrow}{f}'(\vec{a})\right]^{-1}.$$

Beispiele zum Umkehrsatz:

Beispiel 1: Sei $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben.

$$\vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_2 x_3 + x_3 x_1 + x_1 x_2 \\ x_1 x_2 x_3 \end{pmatrix}$$

Es gilt:

$$\overset{\leftrightarrow}{f}'(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_2 + x_3 & x_3 + x_1 & x_1 + x_2 \\ x_2 x_3 & x_3 x_1 & x_1 x_2 \end{pmatrix};$$

$$\det \overset{\leftrightarrow}{f}'(\vec{x}) = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3);$$

Sei

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

ein Punkt mit

$$\det \overset{\leftrightarrow}{f}(\vec{a}) \neq 0$$

(d.h. $a_1 \neq a_2 \neq a_3$). Sei dann $\vec{b} := \vec{f}(\vec{a})$.
Nach dem Umkehrsatz gibt es Umgebungen U_0 von $\vec{a}$ und V von $\vec{b}$ sowie eine C^1 -Abbildung

$\vec{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} : V \to U_0$

derart, dass für $\vec{y} \in V$ und $\vec{x} \in U_0$ folgende Äquivalenz besteht:

$$\vec{f}(\vec{x}) = \vec{y} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{x} = \vec{g}(\vec{y})$$

$$\begin{matrix} f_1(x_1, x_2, x_3) = y_1 \\ f_2(x_1, x_2, x_3) = y_2 \\ f_3(x_1, x_2, x_3) = y_3 \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} x_1 = g(y_1, y_2, y_3) \\ x_2 = g(y_1, y_2, y_3) \\ x_3 = g(y_1, y_2, y_3) \end{matrix}$$

Beispiel 2: Sei die Polarkoordinatenabbildung $\vec{P}_2$,

$\vec{P}_2(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}$

Die Ableitung

$\overleftrightarrow{P}_2{}'(\vec{r}, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}$

ist in jedem Punkt (r, φ) mit $r > 0$ invertierbar.

$\det \overleftrightarrow{P}_2{}'(r, \varphi) = r$

Zu jedem Punkt

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{P}_2 \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix}$

mit $r = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$ gibt es also eine Umgebung U_0 um

$\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix}$

und V um

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

derart, dass die Einschränkung

$\overleftrightarrow{P}_2 : U_0 \to V$

eine differenzierbare Umkehrung $\vec{g} : V \to U_0$ besitzt. Die Ableitung von $\vec{y}$ kann man ohne Kenntnis aus $\overleftrightarrow{g}{}' = \left[\overleftrightarrow{P}_2{}'\right]^{-1}$

berechnen.

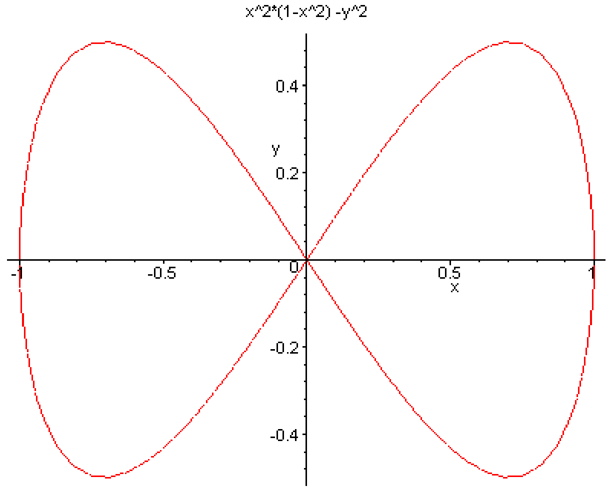
Wegen

$\cos \varphi = \frac{x}{r}$, $\sin \varphi = \frac{y}{r}$:

$$\overleftrightarrow{g}{}' \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left[\overleftrightarrow{P}_2{}'\right]^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \frac{-\sin \varphi}{r} & \frac{\cos \varphi}{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \frac{-y}{x^2 + y^2} & \frac{x}{x^2 + y^2} \end{pmatrix}.$$

3.5 Auflösen von Gleichungen, implizite Abbildungen

Am Beispiel $f(x, y) = x^2 (1 - x^2) - y^2 = 0$ erläutern wir die typische Situation, wenn man eine Gleichung $f(x, y) = 0$ nach $y = f(x)$ oder nach $x = g^*(y)$ aufzulösen versucht.



In der Nähe von $(0, 0)$ gibt es $\forall\, x \neq 0$ und $|x| < 1$ zwei y_1, y_2 mit $f(x, y_1) = f(x, y_2) = 0$, $\forall\, y \neq 0$ mit $|y| < 1/2$ vier x_1, x_2, x_3, x_4 mit $f(x_\nu, y) = 0$. In keiner Umgebung von $(0, 0)$ gibt es eine Auflösung $y = g(x)$ oder $x = g^*(y)$.

Die beiden partiellen Ableitungen

$f_x = 2x - 4x^3 = 0$ bei $x = 0$

$f_y = -2y = 0$ bei $y = 0$

f_x und $f_y = 0$ bei $(x, y) = (0, 0)$!

Die Gleichung $f(x, y) = 0$ hat in keiner Umgebung des Punktes $(1, 0)$ und $(-1, 0)$ eine Auflösung der Form $y = g(x)$, denn $\forall\, x$ um ± 1 gehören 2 y-Werte zu $f(x, y_i) = 0$. Allerdings gibt es Auflösungen der Gestalt $x = g^*(y)$ in der Nähe von $(1, 0)$ und $(-1, 0)$.

$$x = \underbrace{\frac{1}{2}\sqrt{2 + 2\sqrt{1 - 4y^2}}}_{g^*(y)}$$

für

$$|y| < \frac{1}{2}$$

in $(1, 0)$ ist $f_y = 0$ aber $f_x \neq 0$.

Wir zeigen nun, dass eine Gleichung $f(x, y) = 0$ in der Nähe eine Nullstelle (a, b) von f eine differenzierbare Auflösung $y = g(x)$ besitzt, sofern $f_y(a, b) \neq 0$.

Betrachten folgendes allgemeine Problem: Sei $\vec{f} : U \to \mathbb{R}^m$ eine C^1-Abbildung auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$. Wir fragen nach der Lösbarkeit von

$$f_1(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_m) = 0$$
$$\vdots$$
$$f_m(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_m) = 0$$

in der Nähe einer gegebenen Nullstelle

$\begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \end{pmatrix}$
von $\vec{f}$:
$\vec{f}(\vec{x}, \vec{y}) = 0$.

Wir definieren dazu die partiellen Differenziale

$$\mathrm{d}_{\mathbb{R}^k} \vec{f}(\vec{x}, \vec{y}) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m, \ \overset{\leftrightarrow}{\partial}_{\mathbb{R}^k} f := \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f_1 & \cdots & \partial_{x_k} f_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial_{x_1} f_m & \cdots & \partial_{x_k} f_m \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{d}_{\mathbb{R}^m} \vec{f}(\vec{x}, \vec{y}) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m, \ \overset{\leftrightarrow}{\partial}_{\mathbb{R}^m} f := \begin{pmatrix} \partial_{y_1} f_1 & \cdots & \partial_{y_m} f_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial_{y_1} f_m & \cdots & \partial_{y_m} f_m \end{pmatrix}$$

Das totale Differenzial $\mathrm{d}\, f(\vec{x}, \vec{y}) : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ erhält damit die Darstellung:

$$\mathrm{d}\, f(\vec{x}, \vec{y}) \begin{pmatrix} \overbrace{\vec{h}}^{k} \\ \underbrace{\vec{k}}_{m} \end{pmatrix} = \overset{\leftrightarrow}{\partial}_{\mathbb{R}^k} f \cdot \vec{h} + \overset{\leftrightarrow}{\partial}_{\mathbb{R}^m} f \cdot \vec{k} \equiv f\left(g(x)\right).$$

Satz über implizite Funktionen: Sei $\vec{f} : U \to Z$ eine C^1-Abbildung in einer Umgebung $U \subset X \times Y$ einer Nullstelle $(\vec{a}, \vec{b})$ von $\vec{f}$ und $X = \mathbb{R}^k$, $Y = Z = \mathbb{R}^m$. In $(\vec{a}, \vec{b})$ sei das partielle Differenzial $\mathrm{d}_Y \vec{f}(\vec{a}, \vec{b})$ invertierbar, gleichbedeutend ist mit der Invertierbarkeit der Matrix

$\overset{\leftrightarrow}{\partial}_Y f(\vec{a}, \vec{b}) \cdot$

Dann gibt es Umgebungen $U' \subset X$ um $\vec{a}$ und $U'' \subset Y$ von $\vec{b}$ sowie eine C^1-Abbildung $\vec{g} : U' \to U''$ mit der Eigenschaft, dass die Nullstellenmenge von $\vec{f}$ innerhalb $U' \times U''$ genau der Graph von $\vec{g}$ ist.

$$\vec{f}(\vec{x}, \vec{y}) = 0, \ (\vec{x}, \vec{y}) \in U' \times U'' \ \Leftrightarrow \ \vec{y} = \vec{g}(\vec{x}), \ \vec{x} \in U'.$$

Beweis: Folgt aus Umkehrsatz. Siehe Königsberger.

Zusatz: Das Differenzial von $\vec{g}$ in $\vec{x} = \vec{a}$ erhält man im Nachhinein mit der Kettenregel aus der Identität $\vec{f}\left(\vec{x}, \vec{g}(\vec{x})\right) = 0 \quad \vec{x} \in U'$!
Zunächst entsteht
$\mathrm{d}\, \vec{f}(\vec{x}, \vec{g}(\vec{x})) \circ (1_x, \mathrm{d}\, \vec{g}(\vec{x})) = 0$.
Daraus folgt mit der partiellen Differenziation
$\mathrm{d}_x \vec{f}(\vec{x}, \vec{g}(\vec{x})) + \mathrm{d}_y \vec{f}(\vec{x}, \vec{g}(\vec{x})) \circ \mathrm{d}\, \vec{g}(\vec{g}) = 0$.
Wegen $\vec{g}(\vec{a}) = \vec{b}$ folgt für die Funktionalmatrix:

$$\overset{\leftrightarrow}{g}\,'(\vec{a}) = -\left[\overset{\leftrightarrow}{\partial}_y f(\vec{a}, \vec{b})\right]^{-1} \cdot \overset{\leftrightarrow}{\partial}_x f(\vec{a}, \vec{b}) \cdot$$

Beispiel: Gegeben sei das Gleichungssystem
$\vec{f} : \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$f_1(x, y_1, y_2) = x^3 + y_1^3 + y_2^3 - 7 = 0$

$f_2(x, y_1, y_2) = x\ y_1 + y_1\ y_2 + y_2\ x + 2 = 0$
und die Nullstelle $(2, -1, 0)$. In der Nähe der Nullstelle soll das Gleichungssystem hinsichtlich der Auflösbarkeit nach y_1 und y_2 untersucht werden.

Wir bilden die partiellen Jacobi-Matrizen

$$\partial_y \vec{f}(2, -1, 0) = \left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial y_1}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial y_2} \right) = \left. \begin{pmatrix} 3\ y_1^2 & 3\ y_2^2 \\ x + y_2 & x + y_2 \end{pmatrix} \right|_{(2, -1, 0)} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\det \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 3 \neq 0 \ \Rightarrow \text{ Matrix invertierbar.}$$

Es gibt also in einem Intervall I um den Punkt $a = 2$ zwei C^1-Funktionen $g_1, g_2 : I \to \mathbb{R}$ mit $\big(g_1(2), g_2(2)\big) = (-1, 0)$ und
$f_1\big(x, g_1(x), g_2(x)\big) = 0$
$f_2\big(x, g_1(x), g_2(x)\big) = 0$

Ihre Ableitungen im Punkt $x = 2$ erhält man nach obiger Formel:

$$\begin{pmatrix} g'_1(2) \\ g'_2(2) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \left. \begin{pmatrix} \partial_x f_1 \\ \partial_y f_2 \end{pmatrix} \right|_{(2, -1, 0)} = -\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \left. \begin{pmatrix} 3\ x^2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} \right|_{(2, -1, 0)} = -\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \end{pmatrix} =$$
.

Damit erhält man in linearer Näherung
$y_1 = g_1(x) \approx g_1(2) + g'_1(2)(x-2) + O(x^2) = -1 - 4(x-2) = -4\ x + 7$;
$y_2 = g_2(x) \approx g_2(2) + g'_2(2)(x-2) + O(x^2) = 0 + 9(x-2) = 9\ x - 18$;