Ein Skript der Vorlesung

Höhere Mathematik für Physiker
Kapitel Jordan-Normalform

Dr. Peter Giesl
TU München
4. Semester, SS 2001

Datum: 26.06.2001

von Michael Wack, Christoph Moder, Manuel Staebel

http://www.skriptweb.de

Hinweise (z.B. auf Fehler) bitte per eMail an uns: mail@skriptweb.de – Vielen Dank.

Inhaltsverzeichnis

Die Jordannormalform und ihre Anwendung auf Systeme homogener linearer DGL mit konstanten Koeffizienten

$\dot{x} = A\,x$

0. Lineare Abbildungen und Matrizen

V sei ein K-Vektorraum; $K = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ (Körper)

V ist eine Menge von Vektoren v

$+$	$V \times V \to V$	kommutative Gruppe
$\cdot$	$K \cdot V \to V$	skalare Multiplikation

Beispiele: $V = \mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}$; Polynome in x mit reellen Koeffizienten, Grad $\leq n-1$: $a_0 + a_1\,x + \ldots + a_{n-1}\,x^{n-1}$.

Definition: Eine Menge $B = (v_1 , \ldots , v_n)$ von Vektoren $v_i \in V$ heißt **Basis** von V, wenn:

- v_i linear unabhängig sind, d.h. $\lambda_i \in K$ $\lambda_1\,v_1 + \ldots + \lambda_n\,v_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 \ldots \lambda_n = 0$
- v_i erzeugen V, d.h. $\mathrm{lin}\,(v_1 , \ldots , v_n) := \{\lambda_1\,v_1 + \ldots + \lambda_n\,v_n\ ;\ \lambda_i \in K\} = V$

Bemerkung:

1. *Ist v_1 bis v_n eine Basis von V, so heißt n die **Dimension** von V (unabhängig von der Basis).*
2. *Zu jedem Vektor $v \in V$ gibt es genau eine $(\lambda_1 , \ldots , \lambda_n) \in K^n$, so dass $v = \lambda_1\,v_1 + \ldots + \lambda_n\,v_n$, $B = (v_1 , \ldots , v_n)$*

$\Rightarrow$ zu jeder Basis B gibt es einen **Isomorphismus** (d.h. eine bijektive lineare Abbildung).

Beispiel: V Polynome vom Grad ≤ 2 , reelle Koeffizienten $K = \mathbb{R}$;
$B = (1 , x , x^2)$; $B' = (1 , 1+x , 1+x+x^2)$;

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathbb{R}^3 \underset{\phi_{B'}}{\to} V \underset{\phi_B}{\leftarrow} \mathbb{R}^3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$x^2 + 1 \in V$;

$$\phi_{B'} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underset{\in \mathbb{R}}{1} \cdot \underset{\in V}{1} + \underset{\in \mathbb{R}}{0} \cdot \underset{\in V}{x} + \underset{\in \mathbb{R}}{1} \cdot \underset{\in V}{x^2}$$

Allgemein:

$$K^n \underset{\phi_{B'}}{\to} V \underset{\phi_B}{\leftarrow} K^n$$

$B' = (v'_1, \dots, v'_n)$;
$v_i = \sum_j s_{ij} v'_j$;

Matrix $S = (s_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ $s_{ij} \in K$

Berechnung von $S = \phi_{B'}^{-1} \circ \phi_B$:
$S^{-1} = \phi_B^{-1} \circ \phi_{B'}$;

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$S^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$S^{-1} = (s_{ij})$;

$v_i = \sum_j s_{ji} v'_j$;
$v'_1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 = 1$;
$v'_2 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2 = 1 + x$;
$v'_3 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot x + 1 \cdot x^2 = 1 + x + x^2$;

Berechnung der Inversen einer Matrix

Verfahren: Auf beiden Seiten werden immer die gleichen Umformungen gemacht (entweder nur Spalten- oder nur Zeilenumformungen), bis T zur Einheitsmatrix geworden ist. Die Einheitsmatrix auf der anderen Seite ist ann zu T^{-1} geworden.

$$\left(\begin{array}{c|ccc} & 1 & & 0 \\ T & & \ddots & \\ & 0 & & 1 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & \\ & \ddots & & T^{-1} \\ 0 & & 1 & \end{array} \right)$$

Definition: $F : V \to V$ ist **linear**, falls (v, v_1, $v_2 \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$):

- $F(v_1 + v_2) = F(v_1) + F(v_2)$
- $F(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot F(v)$

$$\begin{tikzcd}
K^n \arrow[r, "B = M_{B'}(F)"] \arrow[d] & K^n \arrow[d, "\phi_{B'}"] \\
V \arrow[r, "F"] & V \\
K^n \arrow[r, "A = M_B(F)"'] \arrow[u] \arrow[uu, bend left=60, "\phi_{B'}^{-1} \circ \phi_B"] & K^n \arrow[u, "\phi_B"'] \arrow[uu, bend right=60]
\end{tikzcd}$$

$B = S\ A\ S^{-1}$

Beispiel: $F\ (a + b\ x + c\ x^2) = b + 2\ c\ x$

Berechnung von A ($B = (1\ ,\ x\ ,\ x^2)$):

$F\ (1) = 0\ ,\ F\ (x) = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2$;

$F\ (x^2) = 2\ x$;

$$\Rightarrow\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Definition: **Direkte Summe**: $V = W_1 \oplus W_2$, falls

(1) $V = W_1 + W_2 = \{ w_1 + w_2 | w_1 \in W_1\ ,\ w_2 \in W_2 \}$

(2) $W_1 \cap W_2 = \{0\}$

$\Rightarrow$ zu $v \in V$ gibt es genau ein $w_1 \in W_1$ und $w_2 \in W_2$ mit $v = w_1 + w_2$, denn: existiert wegen (1);

wegen (2): $\Rightarrow\ w_1 = \tilde{w}_1 = \tilde{w}_2 - w_2 = 0 \Rightarrow w_1 = \tilde{w}_1\ ,\ w_2 = \tilde{w}_2$;

Bemerkung:

1) Ist $v_1\ ,\ \ldots\ ,\ v_n$ *Basis von* W_1 *und* $w_1\ ,\ \ldots\ ,\ w_m$ *Basis von* W_2 ($W_1 \cap W_2 = \{0\}$, $W_1 \oplus W_2 = V$ *), dann ist* $(v_1\ ,\ \ldots\ ,\ v_n\ ,\ w_1\ ,\ \ldots\ ,\ w_m)$ *Basis von* V .

2) $w_1 \oplus w_2 = v$

Ist $v_1\ ,\ \ldots\ ,\ v_n$ *Basis von* W_1 *, dann gibt es eine Basis* $w_1\ ,\ \ldots\ ,\ w_m$ *von* W_2 *, so dass* $(v_1\ ,\ \ldots\ ,\ v_n\ ,\ w_1\ ,\ \ldots\ ,\ w_m)$ *Basis von* V *ist.*

3) Es gilt nicht $(v_1\ ,\ \ldots\ ,\ v_{n+m})$ *Basis von* V $\Rightarrow$

$v_{k\ (1)}\ ,\ \ldots\ ,\ v_{k\ (n)}$ *ist Basis von* W_1

$v_{l\ (1)}\ ,\ \ldots\ ,\ v_{l\ (m)}$ *ist Basis von* W_2

4) Sei $V = W_1 \oplus W_2$. F *lineare Abbildung* $V \to V$ *mit* $F\ (w_1) \subset W_1$.

Basis

$$B = \begin{pmatrix} v_1\ ,\ \ldots\ ,\ v_n \in W_1 \\ w_1\ ,\ \ldots\ ,\ w_m \in W_2 \end{pmatrix}$$

$$M_B(F) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} n & m \end{array} & \\ \left(\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline 0 & * \end{array}\right) & \begin{array}{c} n \\ m \end{array} \end{array}$$

1. Jordansche Normalform

$$F^k = \underbrace{F \circ F \circ \ldots \circ F}_{k\text{-mal}}$$

Satz: $F: V \to V$ sei eine lineare Abbildung; das charakteristische Polynom zerfällt in Linearfaktoren (in $\mathbb{C}$ stets der Fall).
Dann gibt es eine Basis B von V, so dass:

$$M_B(F) = \begin{pmatrix} J_1 & & & 0 \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_k \end{pmatrix} \text{ mit } J_i = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & & 0 \\ & \lambda_j & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_j \end{pmatrix}$$

Die J_j sind bis auf Permutation eindeutig bestimmt (d.h. die Basis darf lediglich anders angeordnet sein, dann sind die J_j vertauscht).

Bemerkung: *λ_i, λ_j nicht unbedingt verschieden für $i \neq j$.*

Äquivalenter Satz: Zu $A \subset K^{n \times n}$ mit $\det(A - \lambda I) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_l)^{r_l}$, $r_i \geq 1$, $\lambda_i \in K$, gibt es eine invertierbare Basis $S \in K^{n \times n}$, so dass $S\,A\,S^{-1} = J$.

Beweis:

1. Zerlegung in Haupträume
   $\chi_F(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_k)^{r_k}$ (charakteristisches Polynom), $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$
   $\text{Hau}(F, \lambda_j) = \text{Ker}(F - \lambda_j \,\text{id})^{r_j}$ (wenn $r_j = 1$, ist der Hauptraum gleich dem Eigenraum)
   Kern: $\text{Ker}\, G = \{ v | G\,v = 0 |$

   Lemma: Unter den Voraussetzungen des Satzes gilt:

   1. $V = \text{Hau}(F, \lambda_1) \oplus \text{Hau}(F, \lambda_2) \oplus \ldots \oplus \text{Hau}(F, \lambda_k)$
   2. $\dim \text{Hau}(F, \lambda_j) = r_j$
   3. $\chi_F|_{\text{Hau}(F, \lambda_1)} = (\lambda - \lambda_j)^{r_j}$
   4. $F(\text{Hau}(F, \lambda_j)) \subset \text{Hau}(F, \lambda_j)$

2. Beschränkung auf einen Hauptraum
   Annahme: $\chi_F(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^n$
   $V = \text{Hau}(F, \lambda_0) = \text{Ker}(F - \lambda_0 \,\text{id})^n$

   Bemerkung: *Es gilt: $H := F - \lambda_0 \,\text{id}$ ist **nilpotent**, $\exists$ minimales $p \in \mathbb{N}$: $H^p = 0$.*

Hier gilt nämlich $H^n = 0$, d.h. $\exists$ nur $p \leq n$ mit $H^p = 0$

Lemma: Sei H nilpotent. Dann gibt es eine Basis A, so dass

$$M_A(H) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

(lauter Kästchen mit dieser Struktur, Länge des längsten Kästchens ist p).

$$\Rightarrow M_A(F) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_0 \end{pmatrix}.$$

Beweis:

1. $V_i := \text{Ker } H^i$ ind Vektorräume. Es gilt:
   $\{0\} = V_0 \underset{\neq}{\subset} V_1 \underset{\neq}{\subset} \ldots V_p = V$
   ($H^0 := \text{id}$)
   Denn:
   - VR: $u, v \in V_i$, d.h. $H^i v = 0$, $H^i u = 0$,
     $H^i(u+v) = H^{i-1} H(u+v) = H^{i+1}(H u + H u)$;
     entsprechend $\lambda u \in H^i$, falls $\ldots = H^i u + H^i v = 0$; $u \in H^i$
   - $\subset$: $u \in V_{i-1} \Rightarrow u \in V_i$, $i = 1, \ldots, p$;
     $H^{i-1} u = 0 \Rightarrow H H^{i-1} u = H 0 = 0$; $H^i u = 0$; $\Rightarrow u \in V_i$
   - $\neq$: Falls $H^i v = 0 \Rightarrow$ (*) $H^{i-1} v = 0$ für $i \in \{1, \ldots, p\}$
     $\Rightarrow w \in V \Rightarrow H^p w = 0 \Rightarrow H^i \underbrace{(H^{p-i} w)}_{v} = 0$
     $\Rightarrow H^{p-1} w = 0 \Rightarrow \text{Ker } H^{p-1} = V$. Widerspruch zur Minimalität von p!
2. Basis „von oben“: Hintergedanke: man wendet wiederholt H an (bis man bei 0 ankommt). Man bildet also jeweils einen Basisvektor mit Hilfe von H auf den vorigen Basisvektor ab (stellt ihn als Linearkombination durch die anderen Basisvektoren dar). In der Matrix $M_A(H)$ bedeutet das: in einem Jordan-Kästchen ist die erste Diagonale oberhalb der Hauptdiagonale 1, alle anderen Elemente sind 0, weil der erste Vektor (im Element 1,1) auf 0 (auf 0,1), der zweite Vektor (in 2,2) auf 1,2 usw. abgebildet wird. Die Breite des Jordan-Kästchens entpricht der Länge der Kette der Vektorräume.
   Grund: Wenn man „unten“ bei 0 anfängt und die Basis immer wieder um einen Vektor erweitert, kann es passieren, dass man „steckenbleibt“ – daher muss man von der anderen Seite anfangen.
   Beweis ist exakt beschrieben in: *Fischer*: Lineare Algebra (Anhang B).

Rezept:

- Berechnung der Eigenwerte und Vielfachheiten r_1
  $\det(A - \lambda I) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_k)^{r_k}$

- Fixiere $\lambda = \lambda_j$:
  $V_1 = \operatorname{Ker}\left(A - \lambda\ I\right)$
  $V_2 = \operatorname{Ker}\left(A - \lambda\ I\right)^2$
  $\vdots$
  $V_p = \operatorname{Ker}\left(A - \lambda\ I\right)^p$
  p minimal $V_p = V_{p+1}$, oder p minimal mit $\dim V = r_j$.
  Dann: $V_p = V_{p-1} \oplus U_p$, $V_{p-1} = V_{p-2} \oplus U_p$
  Basis von U_p : $u_1^{(p)}, \dots, u_{l_p}^{(p)}$
  Basis von U_{p-1} : $\left(A - \lambda\ I\right) u_1^{(p)}, \dots, \left(A - \lambda\ I\right) u_{l_p}^{(p)}$
- Jordannormalform: im ersten Kästchen l_p Elemente, Breite p ; zweites Kästchen: l_{p-1} Elemente, Breite $p-1$ usw.

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & 0 & 0 & 1 & \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & & & & 1 \end{pmatrix}$$

1. Eigenwerte:
   $\det\left(A - \lambda\ I\right) = \dots = \lambda^3 \left(\lambda - 1\right)^3$;
   EW: $\lambda_1 = 0$, $r_1 = 3$; $\lambda_2 = 1$, $r_2 = 3$;
2. $\lambda_1 = 0$
   $H = A - \lambda_1 I$;
   $$V_1 = \operatorname{Ker} A = \operatorname{Lin}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} ;$$
   Basis (2-dimensional):
   $$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$
   $V_1 = V_0 \oplus U_1$, $V_0 = \left\{0\right\}$;
   $U_1 = \operatorname{Lin}\left\{u_1^{(1)}, u_1^{(2)}\right\}$ mit:

$$u_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ u_1^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$u_1^{(2)}$ bedeutet: 1. Hauptvektor 2. Stufe; Hauptvektoren 1. Stufe sind die Eigenvektoren.

$$H^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & & & & \\ 2 & 1 & & -1 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & & -2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$V_2 = \text{Ker } H^2 = \text{Lin}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$V_2 = V_1 \oplus U_2$;

3. $\lambda_2 = 1$:

$$H = A - \lambda_2 I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & & & & \\ & -1 & & & & \\ & & -1 & & & \\ & & & -1 & 1 & \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$H^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & & & 0 & 1 \\ -2 & 3 & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$H^3 = \begin{pmatrix} -1 & 3 & & & & \\ & -1 & & & & \\ & & -1 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & & & & \end{pmatrix}$$

$$V_1 = \mathrm{Lin}\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right\} \text{ (1 Dimension)}$$

$$V_2 = \mathrm{Lin}\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\} = \mathrm{Lin}\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right\} \text{ (2 Dimensionen)}$$

$$V_3 = \mathrm{Lin}\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$V_3 = V_2 \oplus U_3;$$

$$u_1^{(3)} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, H\ u_1^{(3)} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, H^2\ u_1^{(3)} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$J = S\ A\ S^{-1} = \begin{pmatrix}0 & 1 & & & & \\ & 0 & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 1 & 1 & \\ & & & & 1 & 1 \\ & & & & & 1\end{pmatrix}$$

$$S^{-1} = \begin{pmatrix}1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & 1 & 1 & \\ -2 & -1 & & & & 1\end{pmatrix}$$

Beispiel: DGL

Lösung der DGL $\dot{x} = A\ x \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (*)

1. Annahme: $A = J$ (Jordannormalform)

Lösung: $e^{J\,t}\cdot c \qquad c\in\mathbb{R}^n$

$$e^{J\,t}=\begin{pmatrix} e^{J_1\,t} & & & \\ & e^{J_2\,t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{J_k\,t}\end{pmatrix}$$

$$J_i=\begin{pmatrix}\lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i\end{pmatrix}=\lambda_i\,I+\underbrace{\begin{pmatrix}0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0\end{pmatrix}}_{r\text{ Elemente breit}}$$

$$J=\begin{pmatrix}J_1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0\end{pmatrix}+\dots$$

$$e^{J_i\,t}=e^{\left(\lambda_i\,I+\begin{pmatrix}0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0\end{pmatrix}\right)t}=e^{\lambda_i\,I\,t}\cdot e^{\begin{pmatrix}0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0\end{pmatrix}t}$$

$$e^{\lambda_i\,I\,t}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda_i^k\,I^k\,t^k}{k!}=e^{\lambda_i\,t}\,I$$

$$e^{J\,t}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{J^k\,t^k}{k!}$$

$$e^{\begin{pmatrix}0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0\end{pmatrix}t}=\sum_{k=0}^{\infty}\begin{pmatrix}0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0\end{pmatrix}^k\cdot t^k=I+\begin{pmatrix}0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0\end{pmatrix}\cdot t+$$

$$+\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & & & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & & & & 0\end{pmatrix}\frac{t^2}{2!}+\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & & & & 0\end{pmatrix}\frac{t^3}{3!}+\dots+\begin{pmatrix}0 & \cdots & 1 & & \\ \vdots & \cdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & & & 0\end{pmatrix}\frac{t^{r-1}}{(r-1)}$$

$$e^{J_i\,t}=e^{\lambda_i\,t}\begin{pmatrix}1 & t & \frac{t^2}{2!} & & \frac{t}{(r-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2!} \\ & & & \ddots & t \\ 0 & & & & 1\end{pmatrix}$$

2. Allgemeiner Fall: $S\;A\;S^{-1}=J\;,\;A=S^{-1}\;J\;S$
   (darauf achten, dass man richtig von links und rechts dranmultipliziert)
   Lösung von (*):

$$e^{A\,t} = e^{S^{-1}\,J\,S\,t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(S^{-1}\,J\,S)^k\,t^k}{k!} = S^{-1} \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{J^k\,t^k}{k!}\right)}_{e^{J\,t}} S = S^{-1}\,e^{J\,t}\,S$$

(wegen $S^{-1}\,J\,S\quad S^{-1}\,J\,S\,\ldots\,S^{-1}\,J\,S = S^{-1}\,J^k\,S$)
Die Spalten der Matrix $S^{-1}\,e^{J\,t}$ sind linear unabhängige Lösungen.
Sei $w^{(1)}, w^{(2)}, \ldots, w^{(s)}$ Kette von Hauptvektoren zum Eigenwert λ_i

$(A-\lambda_i\,I)\,w^{(j)} = w^{(j-1)}$

$(A-\lambda_i\,I)\,w^{(1)} = 0$

$S^{-1} = (w^{(1)}, w^{(2)}, \ldots, w^{(s)})$

Satz:

(1)Sei $w^{(1)}, \ldots, w^{(s)}$ eine Kette von Hauptvektoren zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$ von A. Dann sind

$$e^{\lambda\,t}\,w^{(1)},\ e^{\lambda\,t}\left[t\,w^{(1)}+w^{(2)}\right],\ e^{\lambda\,t}\left[\frac{t^2}{2!}\,w^{(1)}+t\,w^{(2)}+w^{(3)}\right], \ldots,$$

$$e^{\lambda\,t}\left[\frac{t^{s-1}}{(s-1)!}\,w^{(1)}+\ldots+t\,w^{(s-1)}+w^{(s)}\right]$$

linear unabhängige Lösungen von $\dot{x} = A\,x$.

(2)Sei $\lambda = \mu + i\,\nu$, $\nu \neq 0$ ein Eigenvektor von A und $w^{(1)}, \ldots, w^{(s)}$ eine Kette (komplexer) Hauptvektoren.

$$e^{\mu\,t}\left[\cos\,\nu\,t\,\mathrm{Re}\,w^{(1)} - \sin\,\nu\,t\,\mathrm{Im}\,w^{(1)}\right], \ldots,$$

$$e^{\mu\,t}\left[\cos\,\nu\,t\left\{\frac{t^{s-1}}{(s-1)!}\,\mathrm{Re}\,w^{(1)}+\ldots+t\,\mathrm{Re}\,w^{(s-1)}+\mathrm{Re}\,w^{(s)}\right\}\right.$$
$$\left.-\sin\,\nu\,t\left\{\frac{t^{s-1}}{(s-1)!}\,\mathrm{Im}\,w^{(1)}+\ldots+t\,\mathrm{Im}\,w^{(s-1)}+\mathrm{Im}\,w^{(s)}\right\}\right],$$

$$e^{\mu\,t}\left[\sin\,\nu\,t\left\{\frac{t^{s-1}}{(s-1)!}\,\mathrm{Re}\,w^{(1)}+\ldots+t\,\mathrm{Re}\,w^{(s-1)}+\mathrm{Re}\,w^{(s)}\right\}\right.$$
$$\left.+\cos\,\nu\,t\left\{\frac{t^{s-1}}{(s-1)!}\,\mathrm{Im}\,w^{(1)}+\ldots+t\,\mathrm{Im}\,w^{(s-1)}+\mathrm{Im}\,w^{(s)}\right\}\right]$$

Beweis: $(i) \Rightarrow (ii)$: $A\,\nu = \lambda\,\nu$ (ν ist Eigenwert zu λ)

$\Rightarrow\quad A\,\bar{\nu} = \bar{\lambda}\,\bar{\nu}$ ($\bar{\nu}$ ist Eigenwert zu $\bar{\lambda}$) (auch für Hauptvektoren)

Durch Linearkombination von

$e^{\lambda\,t}\,w^{(1)}$ und $e^{\bar{\lambda}\,t}\,\overline{w^{(1)}}$:

$$\mathrm{Re}\,\frac{1}{2}\,e^{\lambda\,t}\,w^{(1)} + \frac{1}{2}\,e^{\bar{\lambda}\,t}\,\overline{w^{(1)}} = e^{\mu\,t}\left[\cos\,\nu\,t\,\mathrm{Re}\,w^{(1)} - \sin\,\nu\,t\,\mathrm{Im}\,w^{(1)}\right]$$

$$\mathrm{Im}\,\frac{1}{2\,i}\,e^{\lambda\,t}\,w^{(1)} - \frac{1}{2\,i}\,e^{\bar{\lambda}\,t}\,\overline{w^{(1)}} = e^{\mu\,t}\left[\cos\,\nu\,t\,\mathrm{Re}\,w^{(1)} - \sin\,\nu\,t\,\mathrm{Im}\,w^{(1)}\right]$$

liefert untere Lösung.

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Berechne Lösungen von $\dot{x} = A\,x$:
Eigenwerte von A : $1 \pm i$ (jeweils doppelt)

Berechne Eigenvektor zu $1 - i$:

$$H = A - (1 - i)\, I = \begin{pmatrix} i & 1 & & \\ 1 & i & 0 & 2 \\ 1 & & i & 1 \\ & -1 & -1 & i \end{pmatrix} ; \; V_1 = \mathrm{Lin}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} ;$$

$$H^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2\,i & 0 & 2 \\ 2\,i & -2 & -2 & 4\,i \\ 2\,i & 0 & -2 & 2\,i \\ -2 & -2\,i & -2\,i & 4 \end{pmatrix} ; \; V_2 = \mathrm{Lin}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} ;$$

$$U_2 = \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Satz (ii): $\lambda = 1 - i$

$$w^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; w^{(2)} = \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dann sind

$$e^t \left[\cos(-t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \sin(-t) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right],$$

$$e^t \left[\cos(-t) \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} - \sin(-t) \left\{ t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right],$$

$$e^t \left[\sin(-t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \cos(-t) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right],$$

$$e^{t}\left[\sin(-t)\left\{t\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}+\cos(-t)\left\{t\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}\right]$$

$i\ \mathrm{d}\ \varphi\ x = \text{Idefix}$, $\varrho_{Öl} = \text{Rohöl}$, p -ter,