Ein Skript der Vorlesung

Höhere Mathematik für Physiker 3

Inoffizielle studentische Mitschrift

Dozent:
Prof. Klaus Buchner
TU München
3. Semester, WS 2000 / 2001

Datum: 18.06.2001

von Michael Wack, Christoph Moder, Manuel Staebel

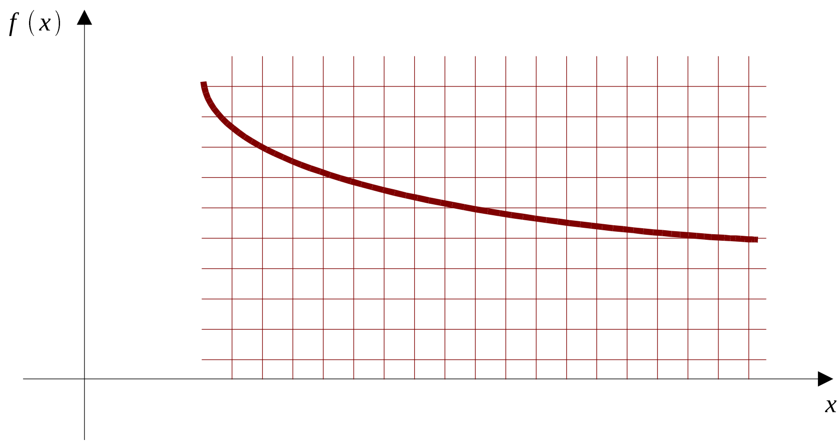
http://www.skriptweb.de

Hinweise (z.B. auf Fehler) bitte per eMail an uns: mail@skriptweb.de – Vielen Dank.

Inhaltsverzeichnis

I. Integralrechnung mehrerer Veränderlicher

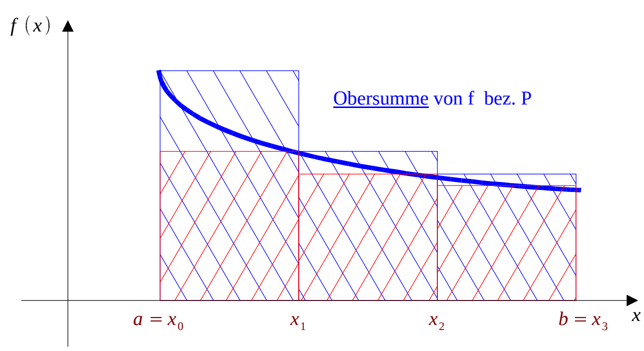
1. Wiederholung: Das Riemannsche Integral



Definition 1: Gegeben: Beschränkte Funktion $f : [a , b] \to \mathbb{R}$.

a) Je $n+1$ Zahlen $x_0 , x_1 , \dots , x_n$ mit $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ bilden eine **Zerlegung** $P := \{x_0 , \dots , x_n\}$ von $[a , b]$;
$I_K := [x_{k-1} , x_k]$ heißt **k-tes Teilintervall**;
$\Delta x_k := x_k - x_{k-1}$ seine **Länge**.
$$\|P\| := \max_{1 \le k \le n} \Delta x_k$$
nennt man **Norm** von P .

b) Seien
$$m_k := \inf_{x \in I_k} f(x) \; ; \; M_k := \sup_{x \in I_k} f(x) .$$
Dann heißen
$$\underline{S_P}(f) := \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k$$
Untersumme von f bezüglich P ,
$$\overline{S_P}(f) := \sum_{k=1}^{n} M_K \Delta x_K$$
Obersumme von f bezüglich P .



Beachte:

1.) $m_K \in M_K \Rightarrow \underline{S}_P(f) \leq \overline{S}_P(f)$

2.) M_K und m_K sind i.d.R. keine Funktionswerte von f, insbesondere nicht die Werte an den Intervallgrenzen.

Satz vom Maximum: Auf einem endlichen abgeschlossenen Intervall nimmt eine stetige Funktion $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ ihr Maximum und ihr Minimum an, d.h. es existieren Zahlen $c, d \in [a,b]$ so, dass für alle $x \in [a,b]$ gilt: $f(x) \leq f(c)$ und $f(x) \geq f(d)$.

Definition: Eine Zerlegung $P' := \{x'_0 = x_0, x'_1, \ldots, x'_m\}$ heißt **Verfeinerung** von P, falls $P \subset P'$.

Betrachte $I_k := [x_{k-1}, x_k]$ zur Zerlegung P. Wegen $P \subset P'$ ist x_{k-1} und $x_k \in P'$, also *entweder*

- I_k ist Teilintervall zu P' *oder*
- I_k enthält mehrere Teilintervalle zu P'.

1. Fall: I_k Teilintervall auch von P' $\Rightarrow$ m_k, M_k und Δx_k gleich
   $\Rightarrow$ Beitrag zu $\underline{S}_P(f)$ und $\underline{S}_{P'}(f)$ aus diesem Intervall gleich, ebenso zu $\overline{S}_P(f)$ und $\overline{S}_{P'}(f)$.

2. Fall: I_k wird durch Punkte von P' in kleinere Teilintervalle zerlegt, etwa $I_k = I'_l \cup I'_{l+1} \cup \ldots \cup I'_q$. $I'_l \subset I_k \Rightarrow \sup\limits_{x \in I'_l} f(x) \leq \sup\limits_{x \in I_k} f(x) \Rightarrow M'_l \leq M_k$.
   Analog: $M'_{l+1} \leq M_k, \ldots, M'_q \leq M_k$ und $m'_l \geq m_k, \ldots, m'_q \geq m_k$. Beitrag aus $[x_{k-1}, x_k]$ zu $\underline{S}_P(f)$, nämlich
   $$\sum_{i=l}^{q} m'_i \, \Delta x'_i$$
   ist nicht kleiner als der zu $\underline{S}_{P'}(f)$, nämlich $m_k \, \Delta x_k$. Analog $\overline{S}_P(f)$.
   $\Rightarrow$ P' Verfeinerung von P $\Leftrightarrow$ $\underline{S}_{P'}(f) \geq \underline{S}_P(f)$ und $\overline{S}_{P'}(f) \leq \overline{S}_P(f)$.

3. Fall: Wegen
   $$\inf_{x \in I_K} f(x) \leq \sup_{x \in I_K} f(x)$$

gilt $\underline{S}_P(f) \leq \overline{S}_P(f)$.
Auch für verschiedene P, P' folgt: $\underline{S}_P(f) \leq \overline{S}_{P'}(f)$ aus 2.:
Sei $P'' := P \cup P'$. Dann gilt: $\underline{S}_{P''}(f) \leq \overline{S}_{P''}(f)$ und, da P'' Verfeinerung von P und P': $\underline{S}_P(f) \leq \underline{S}_{P''}(f) \leq \overline{S}_{P''}(f) \leq \overline{S}_{P'}(f) \Rightarrow \underline{S}_P(f)$ und $\overline{S}_P(f)$ sind nach oben bzw. nach unten beschränkt, wenn P variiert wird.

Definition 2: Gegeben: beschränkte Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}\,x := \sup_P \underline{S}_P(f)$$

heißt **unteres Riemann-Darboux-Integral** und

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}\,x := \inf_P \overline{S}_P(f)$$

oberes Riemann-Darboux-Integral.

Achtung: Zu *jeder* beschränkten Funktion existiert das untere + obere R-D-I.
Wegen 3. gilt stets:

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}\,x \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}\,x$$

Satz 3: Gegeben: Beschränkte Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Für $a \ll b$ gilt:

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}\,x = \underline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}\,x + \underline{\int_c^b} f(x)\,\mathrm{d}\,x$$

und

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}\,x = \overline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}\,x + \overline{\int_c^b} f(x)\,\mathrm{d}\,x$$

Beweis: Sei $\underline{S}_P(f)$ die Untersumme auf $[a, b]$ bezüglich P. Ist $c \notin P$, so betrachte man $P' := P \cup \{c\}$. (2. vor Definition 2) ergibt: $\underline{S}_{P'}(f) \geq \underline{S}_P(f)$, also o.B.d.A: betrachte man Zerlegungen P' und $c \in P'$:

$$\Rightarrow \underline{S}_{P'}(f) = \sum_{x_k \in P'} m_k\,\Delta\,x_K = \sum_{\substack{x_k \in P' \\ x_k \leq c}} m_k\,\Delta\,x_k + \sum_{\substack{x_k \in P' \\ x_k > c}} m_k\,\Delta\,x_k = \underbrace{\underline{S}_{P'}(f)}_{\text{auf } [a, c]} + \underbrace{\underline{S}_{P'}(f)}_{\text{auf } [c, b]}.$$

Analog

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}\,x.$$

Anschaulich: P feiner $\Rightarrow$ steigt $\underline{S}_P(f)$. Obere Grenze $\overline{S}_{P'}(f)$.
Achtung: $S_P(f)$ strebt im allgemeinen *nicht* gegen $\overline{S}_{P'}(f)$.

Beispiel:

$$f(x) := \begin{cases} 0 \text{ für x} \notin \mathbb{Q} \\ 1 \text{ für x} \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ In jedem I_k liegt stets ein $x \in \mathbb{Q}$ und ein $y \notin \mathbb{Q}$.
Für jedes I_k gilt also:

$$M_k = \sup_{x \in I_k} f(x) = 1\,;\quad m_k = \inf_{x \in I_k} f(x) = 0\,;$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}\,x = \underline{S_P}(f) = \sum_{k=1}^{n} m_k\,\Delta\,x_k = 0\,;$$

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}\,x = \overline{S_P}(f) = \sum_{k=1}^{n} M_k\,\Delta\,x_k = \sum_{k=1}^{n} 1\cdot\Delta\,x_k = b-a\,;$$

Definition 4: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ sei beschränkt. Gilt

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}\,x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}\,x := c\,,$$

so heißt f **Riemann-integrierbar** oder **R-integrierbar**, und c nennt man das **Riemann-Integral** von f auf $[a,b]$:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x := c\,.$$

Satz 5: Die beschränkte Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ sei

(1)monoton (steigend oder fallend) oder

(2)stetig oder

(3)stückweise stetig, d.h. stetig bis auf *endlich* viele Unstetigkeitsstellen $z_1,\ldots,z_p$, in denen

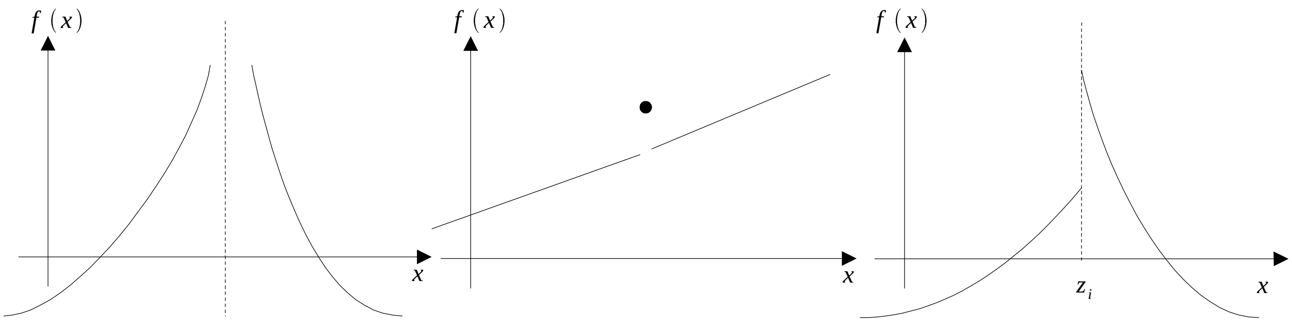
$$\lim_{x \overset{\leq}{\to} z_i} f(x)$$

und

$$\lim_{x \overset{\leq}{\to} z_i} f(x)$$

existiert.

Dann ist f R-integrierbar.



Beweis:

(1): o.E. sei f monoton steigend. Für jede Zerlegung P von $[a, b]$ gilt:

$$\overline{S_P}(f) - \underline{S_P}(f) = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\, \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \big(f(x_k) - f(x_{k-1})\big)\, \Delta x_k$$

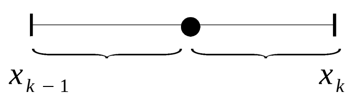
$$\leq \sum_{k=1}^{n} \big(f(x_k) - f(x_{k-1})\big) \|P\| = \Big(f(\underbrace{x_n}_{=b}) - f(\underbrace{x_0}_{=a})\Big) \|P\| = \big(f(b) - f(a)\big) \|P\| \; .$$

(2)„ f stetig" heißt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta = \delta(x) > 0$ mit $|x_k - x| < \delta \Rightarrow |f(x_k) - f(x)| < \varepsilon$.

Wähle

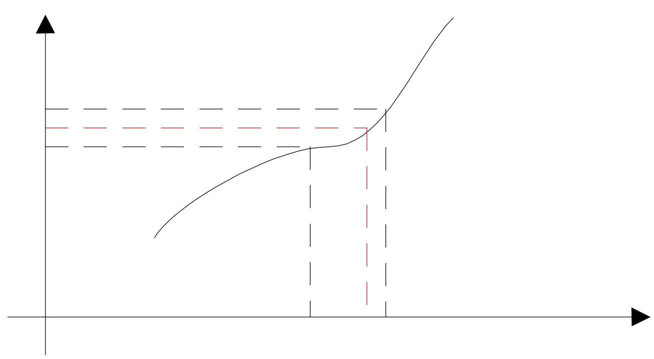
$\varepsilon := 1/n$ und $\|P\| < \delta_0 := \min \delta(x) \quad x \in [a, b]$.

$\Rightarrow \quad M_k - m_k < 2\,\varepsilon = \dfrac{2}{n}$.



Es gilt offenbar:

$$\overline{S_P}(f) - \underline{S_P} = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\, \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k) \|P\| \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{n} \|P\| = 2 \|P\| \; .$$



2. Das Riemann-Integral für Intervalle

Definition 6:

a) Ein **abgeschlossenes Intervall** I des $\mathbb{R}^n$ ist eine Menge der Gestalt

$$I := \left\{ x = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, a^i \le x^i \le b^i \quad \text{für } 1 \le i \le n \right\} .$$

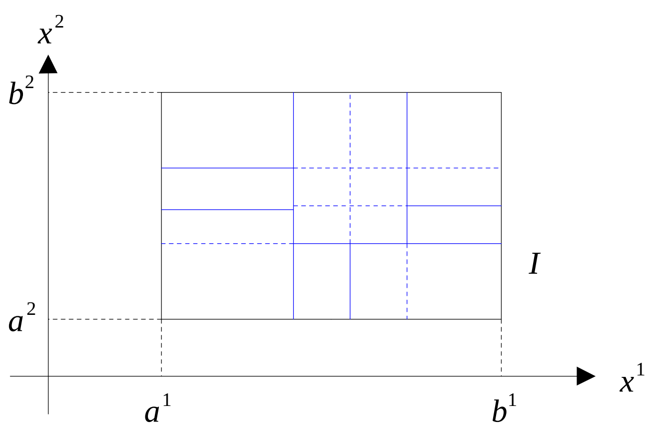
b) Eine Menge $P := \{ I_1, \dots, I_n \}$ von nicht überlappenden abgeschlossenen Intervallen heißt **Zerlegung** des Intervalls I, wenn

$$I = \bigcup_{k=1}^{n} I_k$$

gilt.
(„Nicht überlappend“ heißt: Der Durchschnitt zweier Intervalle enthält höchstens Randpunkte.)

c) Das **Maß** von I ist die Zahl

$$\mu(I) := \prod_{i=1}^{n} (b^i - a^i) .$$



Definition 7: Eine Zerlegung $P' = \{ I'_1, \dots, I'_{m'} \}$ von I heißt **Verfeinerung** von $P = \{ I_1, \dots, I_m \}$, wenn für alle $k' \in \{1, \dots, m'\}$ ein $l \in \{1, \dots, m\}$ existiert, so dass $I'_{k'} \subset I_l$.
Für jede Verfeinerung P' von P gilt:

$\|P'\| \le \|P\|$, wo

$$\|P\| := \max_{\substack{1 \le j \le n \\ 1 \le k \le m}} \left(b_k^j - a_k^j \right)$$

die Norm von P ist, und

$$\mu(I) = \sum_{k=1}^{m} \mu(I_k) = \sum_{k=1}^{m'} \mu(I'_{k'}) .$$

Definition 8: Sei $f : \mathbb{R}^n \supset D(f) \to \mathbb{R}$ auf dem abgeschlossenen Intervall $I \subset D(f)$ beschränkt und sei P eine Zerlegung von I. Definiere:

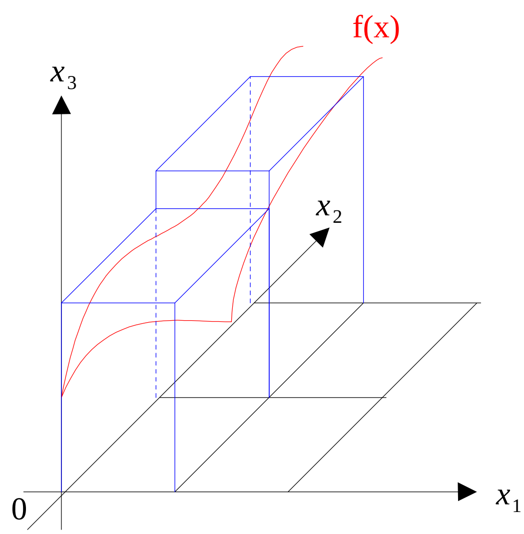
$m_k(f) := \inf_{x \in I_k} f(x)$; $M_k(f) := \sup_{x \in I_k} f(x)$.

Die **Untersumme** von f bezüglich P ist

$$\underline{S_p}(f) := \sum_{k=1}^{m} m_k(f) \cdot \mu(I_k),$$

und die **Obersumme** von f bezüglich P ist

$$\overline{S_p}(f) := \sum_{k=1}^{m} M_k(f) \cdot \mu(I_k).$$



Satz 9: Sei $f : \mathbb{R}^n \supset D(f) \to \mathbb{R}$ auf dem abgeschlossenen Intervall $I \subset D(f)$ beschränkt. Ferner seien P_1, P_2 zwei Zerlegungen von I und P'_1 eine Verfeinerung von P_1. Dann gilt:

a) $\overline{S_{P'_1}}(f) \leq \overline{S_{P_1}}(f)$,

b) $\underline{S_{P'_1}}(f) \geq \underline{S_{P_1}}(f)$,

c) $\underline{S_{P_1}}(f) \leq \overline{S_{P_2}}(f)$.

Beweis:

a), b): Für alle $I'_{k'}$ auf P'_1 existiert $I_l \in P_1$ mit $I'_{k'} \subset I_l$, also:

$$M_{k'}(f) = \sup_{x \in I'_{k'}} f(x) \leq \sup_{x \in I_l} f(x) = M_l(f)$$

und

$$m_{k'}(f) = \inf_{x \in I'_{k'}} f(x) \geq \inf_{x \in I_l} f(x) = m_l(f).$$

$\Rightarrow$ Behauptung.

c): Es gibt eine Zerlegung P von I, die Verfeinerung sowohl von P_1 als auch P_2 ist. (P enthalte z.B. alle Intervalle mit Eckpunkten $(a_k^1, \dots, a_k^n)$ und $(b_k^1, \dots, b_k^n)$, wo a_k^j, b_k^j Koordinaten irgend eines Eckpunkts von P_1 *oder* P_2 sind.)
Wegen
$\inf_{x \in I_k} f(x) \leq \sup_{x \in I_k} f(x)$
gilt: $\underline{S_P}(f) \leq \overline{S_P}(f)$,
und wegen a), b)
$\underline{S_{P_1}}(f) \leq \underline{S_P}(f) \leq \overline{S_P}(f) \leq \overline{S_{P_2}}(f)$.

Definition 10: Sei $f : \mathbb{R}^n \supset D(f) \to \mathbb{R}$ beschränkt auf dem abgeschlossenen Intervall $I \subset D(f)$.

(1) $\underline{\int_I} f(x) \,\mathrm{d}\, x := \underline{\int_I} f(x^1, \dots, x^n) \,\mathrm{d}\,(x^1, \dots, x^n) := \sup_P \underline{S_P}(f)$
heißt **unteres Riemann-Darboux-Integral** von f über I.

(2) $\overline{\int_I} f(x) \,\mathrm{d}\, x := \overline{\int_I} f(x^1, \dots, x^n) \,\mathrm{d}\,(x^1, \dots, x^n) := \inf_P \overline{S_P}(f)$
heißt **oberes Riemann-Darboux-Integral** von f über I.

(3)Falls $\underline{\int_I} f(x) \,\mathrm{d}\, x = \overline{\int_I} f(x) \,\mathrm{d}\, x$, heißt f **(Riemann-)integrierbar** und
$\int_I f(x) \,\mathrm{d}\, x := \overline{\int_I} f(x) \,\mathrm{d}\, x$
(Riemann-)Integral von f über I.

Satz 11: Ist $f : \mathbb{R}^n \supset D(f) \to \mathbb{R}$ stetig auf dem abgeschlossene Intervall $I \subset D(f)$, dann ist f Riemann-integrierbar auf I.

Beweis: Wie zu Satz 5.

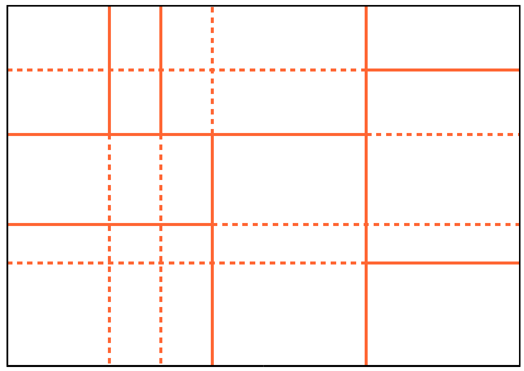
Satz 12 (Satz von Fubini): $f : \mathbb{R}^n \supset D(f) \to \mathbb{R}$ sei auf dem abgeschlossenen Intervall I Riemann-integrierbar. Dann definiert man für $p, q \in \mathbb{N}$ mit mit $p + q = n$: $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$; $I =: I_1 \times I_2$ mit $I_1 \subset \mathbb{R}^p$, $I_2 \subset \mathbb{R}^q$. Setze $\mathbb{R}^n \ni x =: (a, b)$ mit $a \in \mathbb{R}^p$, $b \in \mathbb{R}^q$. Falls für alle $a \in I_1$ das Integral
$\int_{I_2} (a, b) \,\mathrm{d}\, b$
existiert, so gilt:
$\int_I f(a, b) \,\mathrm{d}\, x = \int_{I_1} \left(\int_{I_2} (a, b) \,\mathrm{d}\, b \right) \mathrm{d}\, a$.

Beweis: Seien
$P_y := \left\{ \overset{1}{I}_1, \dots, \overset{1}{I}_l \right\}$
eine Zerlegung von I_1 und
$P_z := \left\{ \overset{2}{I}_1, \dots, \overset{2}{I}_m \right\}$
eine von I_2. Dann ist

$$\left\{\overset{1}{I}_i \times \overset{2}{I}_j \middle| i = 1 , \dots , l ; \; j = 1 , \dots , m \right\}$$

eine Zerlegung von I . Definiere:

$$m_{i\,j} := \inf_{x \in \overset{1}{I}_i \times \overset{2}{I}_j} f(x) , \quad M_{i\,j} := \sup_{x \in \overset{1}{I}_i \times \overset{2}{I}_j} f(x)$$



Einschub Kartesisches Produkt: *M , N Mengen; das kartesische Produkt ist*

$$M \times N := \{(x , y) | x \in M , y \in N\} .$$

$$(x , y) \times (a , b) = (x + a , y + b) ; \; k (x , y) := (k x , k y) \quad k \in \mathbb{R} ;$$

Beachte: *Jede Zerlegung von I besitzt eine Verfeinerung der Form*

$$P' = \left\{\overset{1}{I}_1 \times \overset{2}{I}_j \middle| i = 1 , \dots , l ; \; j = 1 , \dots , m \right\} .$$

Dazu ziehe man die Linien in der Abbildung „durch“, d.h. man bilde die Projektionen aller Intervallsgrenzen von P auf die x^1 -Achse, außerdem die Projektionen x_i^2 auf die x^2 -Achse usw. Betrachte dann die Intervalle

$$\left\{(x^1 , \dots , x^n) \middle| x_{i-1}^k \le x^k \le x_i^k \right\}$$

f ist auf I Riemann-integrierbar $\Rightarrow$ zu allen $\varepsilon > 0$ existiert eine Zerlegung P der genannten Art mit

(1) $\overline{S_P}(f) - \underline{S_P}(f) < \varepsilon$.

Für alle $z \in \overset{2}{I}_j$ gilt:

$$m_{i\,j} \le \inf_{y \in \overset{1}{I}_i} f(y , z) \le \sup_{y \in \overset{1}{I}_i} f(y , z) \le M_{i\,j} .$$

Integriere dies über alle $z \in \overset{2}{I}_j$: wegen

$$\int_{\overset{2}{I}_j} K \,\mathrm{d}\, z = K \cdot \mu(\overset{2}{I}_j)$$

für $K \in \mathbb{R}$:

$$m_{i\,j}\, \mu(\overset{2}{I}_j) \le \inf_{y \in \overset{1}{I}_i} \int_{\overset{2}{I}_j} f(y , z) \,\mathrm{d}\, z \le \sup_{y \in \overset{1}{I}_i} \int_{\overset{2}{I}_j} f(y , z) \,\mathrm{d}\, z \le M_{i\,j}\, \mu(\overset{2}{I}_j) .$$

Multipliziert man dies mit $\mu(\overset{1}{I}_i)$ und summiert über i , j $\Rightarrow$ wegen

$$\mu(\overset{1}{I}_i)\cdot\mu(\overset{2}{I}_j)=\mu(\overset{1}{I}_i\times\overset{2}{I}_j)$$

$$\underline{S_P}(f)=\sum_{i,j} m_{ij}\,\mu(\overset{1}{I}_i\times\overset{2}{I}_j)\le\sum_{i,j}\inf_{y\in\overset{1}{I}_i}\int_{\overset{2}{I}_j} f(y,z)\,\mathrm{d}z\cdot\mu(\overset{1}{I}_i)\le\sum_{i,j}\sup_{y\in\overset{1}{I}_i}\int_{\overset{2}{I}_j} f(y,z)\,\mathrm{d}z\cdot\mu(\overset{1}{I}_i$$

$$\le\sum_{i,j} M_{ij}\,\mu(\overset{1}{I}_i\times\overset{2}{I}_j)=\overline{S_P}$$

Mit (1) $\Rightarrow$ Behauptung, da Terme mit Integralzeichen die Unter- bzw. Obersumme von

$$\int_{I_1}\left(\int_{I_2} f(y,z)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y$$

sind.

***Bemerkung**:*

1) *Satz von Fubini* $\Rightarrow$
$$\int_{I_1}\left(\int_{I_2} f(y,z)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y=\int_{I_2}\left(\int_{I_1} f(y,z)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z,$$
falls alle diese Integrale existieren.

2) *Schreibe statt*
$$\int_I f(x)\,\mathrm{d}x$$
auch
$$\int_{a_1}^{a_2}\int_{b_1}^{b_2} f(a,b)\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}b$$

3) *Existenz von (1)*
$$\int_{I_1}\left(\int_{I_2} f(y,z)\,\mathrm{d}z\right),$$
daraus folgt nicht
$$\int_I f(y,z)\,\mathrm{d}x$$
oder umgekehrt aus Existenz von
$$\int_I f(y,z)\,\mathrm{d}x$$
folgt nicht die Existenz von (1).

Beispiel: Sei $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y,z):=x+e^{y+z}$.

$I:=\{s=(x,y,z)|0\le x\le 1,\ 1\le y\le 2,\ 0\le z\le 2\}$

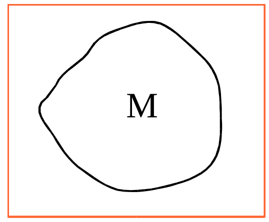
f stetig $\Rightarrow$ alle Integrale existieren

$$\int_I f(s)\,\mathrm{d}s=\int_{\tilde{I}}\left(\int_0^2 f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}(x,y)=\int_0^1\left(\int_1^2\left(\int_0^2 f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1\left(\int_1^2\left[x\,z+e^{y+z}\right]_0^2\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\int_1^2\left[2\,x+e^{y+z}-e^{y}\right]\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1\left[2\,x\,y+e^{y+z}-e^{y}\right]_1^2\mathrm{d}x=\int_0^1\left[2\,x+e^4-e^3-e^2+e\right]\mathrm{d}x$$

$$=\left[x^2+\left(e^4-e^3-e^2+e\right)x\right]_0^1=1+e^4-e^3-e^2+e\,\cdot$$



I(M) > M

Definition 13:

a) Die **charakteristische Funktion** c_M einer beschränkten Menge $M \in \mathbb{R}^n$ ist definiert durch

$$c_M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\,,\quad c_M(x) := \begin{cases} 1 \text{ für } x \in M \\ 0 \text{ für } x \notin M \end{cases}$$

b) Für eine beschränkte Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ und eine beschränkte Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist

1.) das **untere Riemann-Darboux-Integral** von f auf M

$$\underline{\int}_M f(x)\,\mathrm{d}\,x := \underline{\int}_{I(M)} f(x)\cdot c_M(x)\,\mathrm{d}\,x\,.$$

Dabei ist $I(M)$ ein beliebiges abgeschlossenes Intervall mit $M \subset I(M)$.

2.) das **obere Riemann-Darboux-Integral** von f auf M

$$\overline{\int}_M f(x)\,\mathrm{d}\,x := \overline{\int}_{I(M)} f(x)\cdot c_M(x)\,\mathrm{d}\,x\,.$$

3.) Falls $\underline{\int}_M f(x)\,\mathrm{d}\,x = \overline{\int}_M f(x)\,\mathrm{d}\,x$ gilt, heißt f auf M **Riemann-integrierbar** und

$\int_M f(x)\,\mathrm{d}\,x := \overline{\int}_M f(x)\,\mathrm{d}\,x$ **(Riemann-)Integral** von f über M.

Bemerkung:

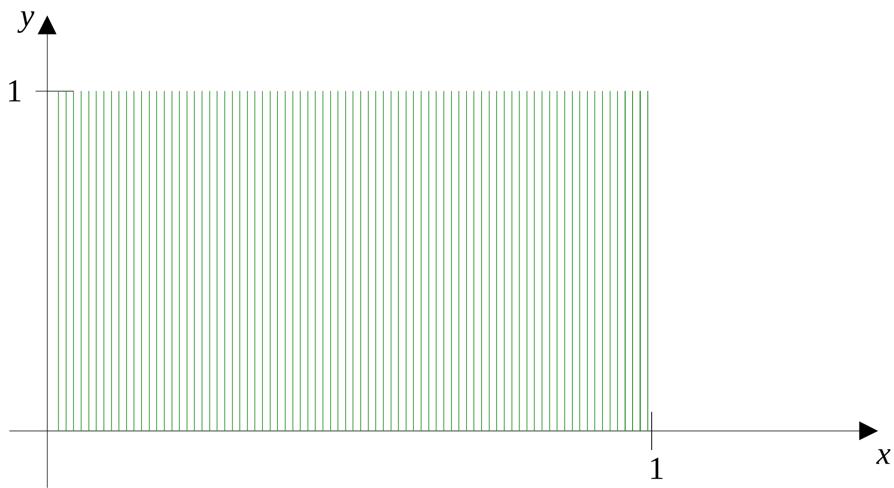
1.) $I(M) \supset M$

2.) Unteres und oberes Riemann-Darboux-Integral existiert immer.

3.) Satz von Fubini gilt.

Beispiel: Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die konstante Funktion $f(x) := 1$ und M die Menge

$$M := \left\{(x\,,\,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \le x \le 1\,;\ y = 0 \text{ für } x \in \mathbb{Q}\,;\ 0 \le y \le 1 \text{ für } x \notin \mathbb{Q}\right\}.$$



Wähle z.B. $I(M) := \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1\ ;\ 0 \leq y \leq 1\}$.

Sei P beliebige Zerlegung von $I(M)$. Da jedes $I_k \in P$ Punkte (x, y) mit $x \in \mathbb{Q}$ enthält $m_k(f \cdot c_M) = 0$. Jedes $I_k \in P$ enthält Punkte mit $x \notin \mathbb{Q}$ $\Rightarrow$ I_k enthält Punkte mit $c_M = 1$ $M_k(f \cdot c_M) = 1$.

$$\mu(I(M)) = 1 = \sum_{k=1}^{m} \mu(I_k) \quad \Rightarrow \quad \underline{\int_{I(M)}} f(x) \cdot c_M(x) \,\mathrm{d}\, x = \sup_P \sum_{k=1}^{m} m_k(f\, c_M)\, \mu(I_k) = 0\ ;$$

$$\overline{\int_{I(M)}} f(x)\, c_M(x) \,\mathrm{d}\, x = \inf_P \sum_{k=1}^{m} M_k(f\, c_M)\, \mu(I_k) = 1 \quad \Rightarrow \quad \underline{\int_M} f(x) \,\mathrm{d}\, x \neq \overline{\int_M} f(x) \,\mathrm{d}\, x .$$

Satz 14 Rechenregeln: $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ seien auf $M \subset \mathbb{R}^n$ integrierbar. Dann gibt für alle $a \in \mathbb{R}$:

1.) $\int_M a \cdot f(x) \,\mathrm{d}\, x = a \int_M f(x) \,\mathrm{d}\, x$

2.) $\int_M \left(f(x) + g(x)\right) \mathrm{d}\, x = \int_M f(x) \,\mathrm{d}\, x + \int_M g(x) \,\mathrm{d}\, x$

3.) $\forall_{x \in M}\ f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_M f(x) \,\mathrm{d}\, x \leq \int_M g(x) \,\mathrm{d}\, x$

4.) $\left|\int_M f(x) \,\mathrm{d}\, x\right| \leq \int_M |f(x)| \,\mathrm{d}\, x$

5.) $f(x) \cdot g(x)$ ist auf M integrierbar

***Bemerkung**: Ist* $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ $\Rightarrow$
$$\int_{M_1 \cup M_2} f(x) \,\mathrm{d}\, x = \int_{M_1} f(x) \,\mathrm{d}\, x + \int_{M_2} f(x) \,\mathrm{d}\, x .$$

Satz 15: Ist die beschränkte Funktion $f : \mathbb{R}^n \supset D(f) \to \mathbb{R}$ integrierbar auf M_1, M_2 und $M_1 \cap M_2 \subset \mathbb{R}^n$, dann auch f auf $M_1 \cup M_2$; es gilt:
$$\int_{M_1 \cup M_2} f(x) \,\mathrm{d}\, x = \int_{M_1} f(x) \,\mathrm{d}\, x + \int_{M_2} f(x) \,\mathrm{d}\, x - \int_{M_1 \cap M_2} f(x) \,\mathrm{d}\, x .$$

Definition 16: Eine beschränkte Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt **(Riemann-)messbar**, wenn

$$\int_M \mathrm{d}\, x$$

existiert (d.h. $f(x)=1$).

$$\int_M \mathrm{d}\, x$$

heißt **(Riemann-)Maß** von M .

M heißt **Nullmenge**, wenn

$$\int_M \mathrm{d}\, x = 0$$

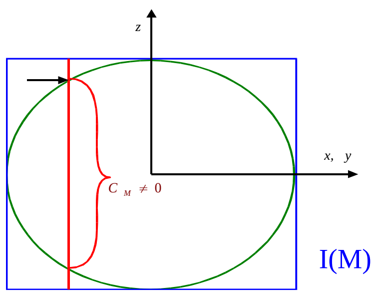
ist.

Beispiel: Kugelvolumen: Berechne $1/8$ des Volumens : Kugel um $\vec{0} \in \mathbb{R}^3$ mit $0 \le x \le r$, $0 \le y \le r$, $0 \le z \le r$.

$c_M(x, y, z) = 1$ für $\sqrt{x^2+y^2+z^2} \le r$.

Sei

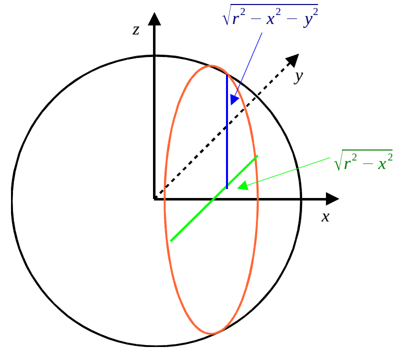
$$I(M) := \left\{ (x, y, z) \middle| 0 \le \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \le r \right\} .$$



$$\int_M \mathrm{d}\, x = \int_0^r \left(\int_0^r \left(\int_0^r c_M(x, y, z)\, \mathrm{d}\, z \right) \mathrm{d}\, y \right) \mathrm{d}\, x = \int \left(\int \underbrace{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}_{0 \le z \le \sqrt{r^2-x^2-y^2}} \mathrm{d}\, y \right) \mathrm{d}\, x$$

$$= \int_0^r \left(\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} \sqrt{r^2-x^2-y^2}\, \mathrm{d}\, y \right) \mathrm{d}\, x = \int_0^r \frac{1}{2} \left[\sqrt{r^2-x^2-y^2} + (r^2-x^2) \arcsin \frac{y}{\sqrt{r^2-x^2}} \right]_0^{\sqrt{r^2-x^2}} \mathrm{d}\, x$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^r \left[0 + (r^2-x^2) \underbrace{\arcsin 1}_{=\pi/2} \right] \mathrm{d}\, x = \frac{\pi}{4} \int_0^r (r^2-x^2)\, \mathrm{d}\, x = \frac{\pi}{4} \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^r = \frac{\pi}{4} \frac{2 r^3}{3} = \frac{\pi}{6} r^3$$



x : Werte $0 \leq x \leq r$; zu gegebenem x : $0 \leq y \leq \sqrt{r^2 - x^2}$; zu gegebenem (x, y) : $0 \leq z \leq \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$.

Satz 17: Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene, messbare Menge, und ist $f : D(f) \to \mathbb{R}$ stetig, so existiert $\int_M f(x)\,\mathrm{d}x$.

Bemerkung:

1.) Satz 17 verallgemeinert Satz 11.

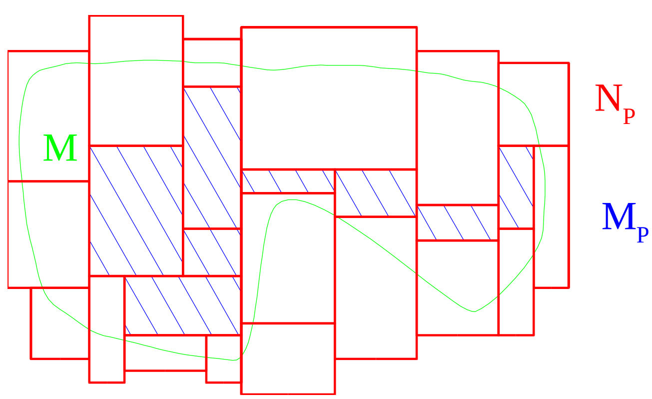
2.) „ M abgeschlossen“

Satz 18: Eine beschränkte Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann messbar, wenn ihr Rand eine Nullmenge ist.

„Mathematik ist nichts was man ler sondern man muss sich daran gewöhnen.“

Beweis: Sei $I(M)$ ein beliebiges abgeschlossenes Intervall mit $M \subset I(M)$ und seien I_k die Intervalle einer Zerlegung von $I(M)$ und

$$M_P(M) := \sum_{I_k \subset M} \mu(I_k) ; \quad N_P := \sum_{I_k \cap M \neq \emptyset} \mu(I_k) .$$



1.) ∂M bezeichne den Rand von M . Sei also $\mu(\partial M) = 0 \Rightarrow \underset{\varepsilon > 0}{\forall}$ existiert eine Zerlegung P von $I(M)$ mit $N_P(\partial M) < \varepsilon$

$$\overline{\int_M} \mathrm{d}x - \underline{\int_M} \mathrm{d}x = \inf_Q N_Q(M) - \sup_Q M_Q(M) \leq N_P(M) - M_P(M) = \sum_{I_k \cap M \neq \emptyset} \mu(I_k) - \sum_{I_k \subset M} \mu(I_k)$$

$$\leq \sum_{I_k \cap \partial M \neq \emptyset} \mu(I_k) = N_P(\partial M) < \varepsilon .$$

2.) Sei jetzt M messbar $\Leftrightarrow$ zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine Zerlegung P von $I(M)$ mit $N_P(M) - M_P(M) < \varepsilon$:

$$\sum_k \sup_{x \in I_k} \left(1 \; c_M(x)\right) \mu(I_k)$$

Seien

$X_1 := \left\{ x \in \partial M \middle| x \in \bigcup_{I_k \subset M} I_k \right\}$, $X_2 := \partial M - X_1$.

X_1 enthält nur *Rand*punkte der Intervalle I_k $\Rightarrow$ X_1 ist aus endlich vielen Stücken von Randflächen dieser Intervalle zusammengesetzt. Diese Randflächen haben das n-dimensionale Maß 0.

$\Rightarrow$ $\mu(X_1) = 0$;

$$\overline{\int_{X_1}} \mathrm{d}\, x \leq N_P(X_2) = N_P(M) - M_P(M) < \varepsilon$$

$\Rightarrow$

$$\overline{\int_{X_2}} \mathrm{d}\, x = 0$$

und

$$\int_{X_2} \mathrm{d}\, x = 0$$

Wegen $\partial M = X_1 \cup X_2$ und Satz 15 $\Rightarrow$

$$\int_{\partial M} \mathrm{d}\, x = \int_{X_1} \mathrm{d}\, x + \int_{X_2} \mathrm{d}\, x = 0 + 0 = 0 .$$

Korollar 19: Sind M_1 und M_2 messbar, dann auch $M_1 \cup M_2$, $M_1 \cap M_2$ und für $M_2 \subset M_1$ auch $M_1 - M_2$. Es gilt:
$\mu(M_1 \cup M_2) = \mu(M_1) + \mu(M_2) - \mu(M_1 \cap M_2)$.

Beweis:

1.) Aus $\partial(M_1 \cap M_2) \subset \partial M_1 \cup \partial M_2$ folgt: $\partial(M_1 \cap M_2)$ ist Nullmenge. Satz 18: $M_1 \cap M_2$ ist messbar.

2.) Satz 15: $f(x) = 1$ $\Rightarrow$ Behauptung.

Satz 20: Sei $f : \mathbb{R}^n \supset D(f) \to \mathbb{R}^m$ stetig und zu $D(f)$ kompakt. Dann ist die Menge
$M := \left\{ (x, y) \middle| x \in D(f) ; \; y = f(x) \right\} \subset \mathbb{R}^{n+m}$
eine Nullmenge.

Zitat: *Pillbox-Integration: „Die lassen einfach die Höhe der Pillenschachteln gegen 0 gehen, offensichtlich sind bei denen die Pillenschachteln so flach, bei uns sind sie höher.“*

Beweis:

$$\forall_{\varepsilon > 0} \; \exists_{\delta = \delta(x_0) > 0} \; |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \; |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

f ist gleichmäßig stetig auf $D(f)$, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, das *nicht* von x

abhängt und $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ erfüllt.
Mit Satz von Heine: f ist auf $D(f)$ gleichmäßig stetig. Sei $I(D)$ ein kompaktes Intervall mit $D(f) \subset I(f)$ $\Rightarrow$ es existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung $P = \{I_k\}$ von $I(D)$ mit $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, falls $x, y \in D(f)$ und im selben Intervall liegen. Alle Punkte $x \in M$ mit $x \in I_k$ liegen daher im $(m+n)$-dimensionalen Intervall mit dem Maß $\mu(I_k) \cdot \varepsilon^m$ $\Rightarrow$ M lässt sich in eine Menge von Intervallen mit dem Maß

$$\sum_k \mu(I_k) \cdot \varepsilon^m = \mu\left(I\left(D(f)\right)\right) \cdot \varepsilon^m$$

einschließen. $\varepsilon > 0$ beliebig klein $\Rightarrow$ M hat Maß 0.

Satz von Heine: f stetig auf kompaktem $D(f)$ $\Rightarrow$ f ist gleichmäßig stetig auf $D(f)$.

Satz 21: Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte messbare Menge, und sei $f: M \to \mathbb{R}$ integrierbar auf M. Wähle $p, q \in \mathbb{N}$ mit $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$; $\mathbb{R}^n \ni x =: (a, b)$ mit $a \in \mathbb{R}^p$; $b \in \mathbb{R}^q$. Sei

$$M_a := \left\{ b \in \mathbb{R}^q \middle| (a, b) \in M \right\}, \quad M' := \left\{ a \in \mathbb{R}^p \middle| M_a \neq \emptyset \right\}.$$

Existiert für alle $a \in M'$ das Integral

$$\int_{M_a} f(a, b) \,\mathrm{d}\, b,$$

so gilt:

$$\int_M f(x) \,\mathrm{d}\, x = \int_{M'} \left(\int_{M_a} f(a, b) \,\mathrm{d}\, b \right) \mathrm{d}\, a.$$

Beweis: Fubini.

Beispiel: Kugelvolumen

1. Schritt: $n = 3$; $p = 2$; $q = 1$. Koordinaten des $\mathbb{R}^3 : (x, y, z)$
   $a := (x, y)$; $M_a := \left\{ z \in \mathbb{R} \middle| (x, y, z) \in M \right) = \left\{ z \middle| 0 \le z \le \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} \right\}$
2. Schritt: x- und y-Integral
   $M_x = \left\{ y \in \mathbb{R} \middle| (x, y, z) \in M \text{, wobei } 0 \le z \le \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} \right\} = \left\{ y \in \mathbb{R} \middle| 0 \le y \le \sqrt{r^2 - x^2} \right\}$;
   $M' = \left\{ x \in \mathbb{R} \middle| M_x \neq \emptyset \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \middle| 0 \le x \le r \right\}$

Satz 22 (Prinzip von Cavalieri): Spezialfall von Satz 21 mit $p = 1$; $f(x) = 1$:

$$\int_M \mathrm{d}\, x = \int_{M'} \left(\int_{M_a} \mathrm{d}\, b \right) \mathrm{d}\, a = \int_{M'} \mu(M_a) \,\mathrm{d}\, a.$$

Beispiel: Kugelvolumen: $n = 3$; $p = 1$; $q = 2$:

$$\mu(M_x) = \frac{1}{2}(r^2 - x^2)\,\pi;$$

Volumen der Achtelkugel:

$$\int_0^r \frac{1}{4}(r^2 - x^2)\,\pi\,\mathrm{d}\,x = \frac{\pi}{6}\,r^3\,.$$

Definition 23: $M \subset \mathbb{R}^n$ sei Riemann-messbar und alle Komponenten $g^i(x)$ der Funktion $g: M \to \mathbb{R}^m$ seien auf M integrierbar. Dann definiert man:

$$\int_M g(x)\,\mathrm{d}\,x := \left(\int_M g^1(x)\,\mathrm{d}\,x\,,\,\int_M g^2(x)\,\mathrm{d}\,x\,,\,\ldots\,,\,\int_M g^m(x)\,\mathrm{d}\,x\right),$$

d.h.

$$\int_M g(x)\,\mathrm{d}\,x$$

ist der Vektor mit den Komponenten

$$\int_M g^i(x)\,\mathrm{d}\,x\,.$$

Beispiel:

– Schwerpunkt s eines Körpers M der Dichte ϱ:

$$s = \frac{1}{m}\int_M x\,\varrho(x)\,\mathrm{d}\,x$$

mit der Masse

$$m = \int_M \varrho(x)\,\mathrm{d}\,x\,.$$

– Elektrisches Feld E einer Punktladung:

$$\frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{\varrho}{|x-y|^3}\,(x-y)\,;$$

Ladungsdichte ϱ:

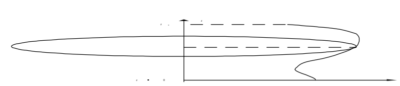
$$E(x) = \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\int_M \frac{\varrho(y)}{|x-y|^3}\,(x-y)\,\mathrm{d}\,y\,.$$

Satz 24: Die Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ sei beschränkt und $f: M \to \mathbb{R}$ sei integrierbar auf M. Ferner sei M_0 eine Nullmenge mit $M_0 \subset M$. Dann ist auf M jede beschränkte Funktion $g: M \to \mathbb{R}$ integrierbar, falls $f(x) = g(x)$ für alle $x \in M - M_0$ gilt. Es gilt:

$$\int_M g(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_M f(x)\,\mathrm{d}\,x\,.$$

Beweis: Satz 15, da definitionsgemäß jede integrierbare Funktion beschränkt ist.

4. Mittelwertsätze, Substitutionsregel



$$O = 2\pi \int_0^z r(z)\,\mathrm{d}z\,;$$

$$V = \pi \int r^2(z)\,\mathrm{d}z$$

Satz 25 Mittelwertsätze der Integralrechnung: Für eine messbare Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ und eine auf M integrierbare Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ gilt:

1) Es gibt ein $m \in \mathbb{R}$ mit
$$\inf_{x\in M} f(x) \le m \le \sup_{x \in M} f(x)$$
und
$$\int_M f(x)\,\mathrm{d}x = m \cdot \mu(M).$$

2) Ist $g : M \to \mathbb{R}$ ebenfalls integrierbar auf M mit $g(x) \ge 0$ für alle $x \in M$, so existiert ein $m \in \mathbb{R}$, das
$$\inf_{x\in M} f(x) \le m \le \sup_{x \in M} f(x)$$
und
$$\int_M f(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x = m \int_M g(x)\,\mathrm{d}x$$
erfüllt.

Beweis: Für $g(x) \ge 0$ gilt:
$$\inf_{y\in M} f(y) \cdot g(x) \le f(x)\,g(x) \le \sup_{y\in M} f(y)\,g(x)$$
$$a := \inf_{x\in M} f(x)\,;\ A := \sup_{x\in M} f(x)\,;$$
Satz 14 (3):
$$a \int_M g(x)\,\mathrm{d}x \le \int_M f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x \le A \int_M g(x)\,\mathrm{d}x\,,$$
d.h. es existiert ein $m \in [a, A]$ mit
$$\int_M f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x = m \int_M g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x(y))\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\,\mathrm{d}y$$

Satz 26 Substitutionsregel: Seien $M, N \subset \mathbb{R}^n$ beschränkte, messbare Mengen, dann sei $f : M \to \mathbb{R}$ stetig und $T : N \to M\,;\ y \to x(y)$ eine stetig differenzierbare, eineindeutige Abbildung mit
$$\det\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^k}\right) \ne 0 \quad \forall\ y \in N\,.$$
Dann gilt:
$$\int_M f(x)\,\mathrm{d}x = \int_N f(x(y)) \left|\det\left(\frac{\partial x^i}{\partial x^k}\right)\right| \mathrm{d}y\,.$$

Beispiel: $x^1 = r\cos\varphi\,,\ x^2 = r\sin\varphi\,,\ y^1 = r\,,\ y^2 = \varphi\,;$

$$\det\left(\frac{\partial(x^1, x^2)}{\partial(r, \varphi)}\right) = \det\begin{pmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi\\ \sin\varphi & r\cos\varphi\end{pmatrix} = r$$

Beweis: Zurückführen auf $n = 1$. Vollständige Induktion nach m mit $1 \le m \le n$:

Es gilt $x^i = g^i(y)$ mit $x^p = y^p$ für $p = m+1, \dots, n$.

$m = 1$: Behauptung trivial.

a) Sei jetzt $x = g(y)$ die Koordinatentransformation mit

$$\det\left(\frac{\partial g^p(y)}{\partial y^q}\right) \neq 0 ,$$

so existiert für jedes j mindestens eine Komponente y^k mit

$$\frac{\partial g^j(y)}{\partial y^k} \neq 0 .$$

Umbenennen von x-Koordinaten $\Rightarrow$ $j = k$. Satz über lokale Umkehrbarkeit $\Rightarrow$ es existiert eine C^1-Abbildung G mit $y^m = G(y^1, \dots, x^m, y^{m+1}, \dots, y^n)$, und die Transformation $x = g(y)$, $x^p = y^p$ für $p = m+1, \dots, n$ kann in der Form

$$(1)\quad \begin{cases} z^m = g^m(y^1, \dots, y^n) \\ x^i = y^i \text{ für } i \neq m \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} x^i = z^i \text{ für } i \geq m \\ x^i = g^i\left(z^1, \dots, G(z^1, \dots, z^m, \dots, z^n), \dots z^n\right) \text{ für } i < m \end{cases}$$

Funktionaldeterminante von (1):

$$\det\left(\frac{\partial z^p(y)}{\partial y^q}\right) = \frac{\partial g^m(y)}{\partial y^m}$$

Funktionaldeterminante der gesamten Transformation:

$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

$$(*)\quad \det\left(\frac{\partial g^p(y)}{\partial y^q}\right) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\partial h^i}{\partial y^i} ,$$

wenn g aus n „primitiven“ Transformationen $z^j = h^j(y)$; $z^k = y^k$ für alle $k \neq j$ zusammengesetzt ist.

b) Sei jetzt $x = H(y)$ eine „primitive“ Koordinatentransformation $x^k = y^k$ für alle $k \neq j$ mit

$$\frac{\partial h(y)}{\partial y^j} \neq 0$$

in einem Punkt $y \in N$.

Es sei $I \subset \mathbb{R}^n$ ein abgeschlossenes Intervall mit Kantenlängen Δy^k , das durch die Hyperebenen $y^k = y_0^k = \text{const}$ und $y^k = y_0^k + \Delta y^k$ begrenzt wird.

(*) $\Rightarrow$ die beiden Hyperebenen werden

$x^j = h(y^1, \dots, y_0^j, \dots, y^n)$; $x^j = h(y^1, \dots, y_0^j + \Delta y^j, \dots, y^n)$;

Maß des transformierten Intervalls: $\mathrm{d}^n x$: n-dimensionale Integration

$$\mu(I') := \int \mathrm{d}^n x = \int x^j(y)\Big|_{y_0}^{y_0 + \Delta y} \mathrm{d}^{n-1} x$$

$$= \left|\int \left(h(y^1, \dots, y_0^j, \dots, y^n) - h(y^1, \dots, y_0^j, \dots, y^n)\right) \cdot \mathrm{d}\, y^1 \cdot \ldots \cdot \mathrm{d}^{j-1} \cdot \mathrm{d}^{j+1} \cdot \ldots \cdot \mathrm{d}^n\right|$$

Mittelwertsatz der Integralrechnung:

$$\mu(I') = \left| h(\bar{y}^1, \ldots, y_0^j + \Delta y^j, \ldots, \bar{y}^n) - h(\bar{y}^1, \ldots, y_0^j, \ldots, \bar{y}^n) \right| \cdot \Delta y^1 \ldots \Delta y^{j-1} \cdot \Delta y^j$$

mit $y_0^i \leq \bar{y}^i \leq y_0^i + \Delta y^i$.

Mittelwertsatz der Differenzialrechnung:

$$\mu(I') = \left| \frac{\partial h(\bar{y}^1, \ldots, \bar{y}^j, \ldots, \bar{y}^n)}{\partial y^j} \right| \Delta y^1 \ldots \Delta y^j \ldots \Delta y^n$$

Obersumme einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \supset D(f) \to \mathbb{R}$

$$\sum_k \sup_{x \in I'_k} f(x) \, \mu(I'_k) = \sum_k \sup_{y \in I_k} f(H(y)) \frac{\partial h(\bar{y})}{\partial y^j} \mu(I_k) .$$

Dies gilt für alle Zerlegungen von N .

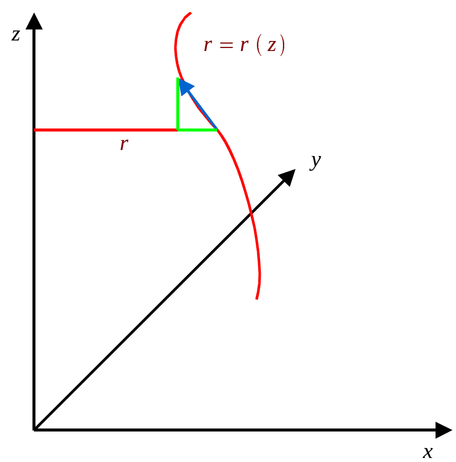
Existiert das Integral

$$\int_M f(x) \, \mathrm{d} x = \int_N f(H(y)) \left| \frac{\partial h(y)}{\partial y^j} \right| \mathrm{d} y ,$$

$\Rightarrow$ Behauptung

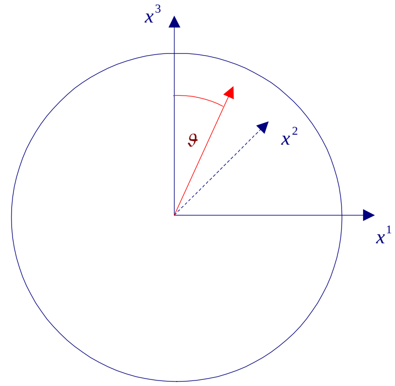
Beispiel:

1. Kugelkoordinaten: $x^1 = r \sin \vartheta \cos \varphi$; $x^2 = r \sin \vartheta \sin \varphi$, $x^3 = r \cos \vartheta$
$r \geq 0$, $0 \leq \vartheta \leq \pi$, $0 \leq \varphi < 2\pi$



Bogenlänge s der Kurve:
$r = r(z)$;

$$\left(\frac{\mathrm{d} s}{\mathrm{d} z}\right)^2 = \left(\frac{\mathrm{d} z}{\mathrm{d} z}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d} r}{\mathrm{d} z}\right)^2 ;$$



$$\frac{\mathrm{d}\ s}{\mathrm{d}\ z} = \sqrt{1+(r')^2}$$

Oberfläche:

$$O = 2\ \pi \int_0^{s(z_0)} r\ (z)\ \mathrm{d}\ s = 2\ \pi \int_0^{z_{0r}} (z)\ \sqrt{1+(r')^2}\ \mathrm{d}\ z$$

1.)

$$x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \frac{\partial\ (x^1,\ x^2,\ x^3)}{\partial\ (r\ ,\ \vartheta\ ,\ \varphi)} = \begin{pmatrix} \sin\ \vartheta\ \cos\ \varphi & r\ \cos\ \vartheta\ \cos\ \varphi & -r\ \sin\ \vartheta\ \sin\ \varphi \\ \sin\ \vartheta\ \sin\ \varphi & r\ \cos\ \vartheta\ \sin\ \varphi & r\ \sin\ \vartheta\ \cos\ \varphi \\ \cos\ \vartheta & -r\ \sin\ \vartheta & 0 \end{pmatrix};$$

$$x^1 = r\ \sin\ \vartheta\ \cos\ \varphi\ ;\ x^2 = r\ \sin\ \vartheta\ \sin\ \varphi\ ;\ x^3 = r\ \cos\ \vartheta\ ;$$

$$\det\ \frac{\partial\ (x^1,\ x^2,\ x^3)}{\partial\ (x^1,\ x^2,\ x^3)} = r^2\ \sin\ \vartheta\ ;$$

Kugelvolumen:

$$c_M\ (x) = 1\ \text{für} \begin{cases} 0 \le r < r_0 \\ 0 \le \vartheta \le \pi \\ 0 \le \varphi < 2\ \pi \end{cases}$$

$$\det = 0\ \ \text{für}\ \ r = 0\ \ \text{und}\ \ \vartheta = 0\ ,\ \pi\ .$$

Satz 20: $n = 2\ ,\ m = 1\ ;$

$$f\ :\ \mathbb{R}^n \supset D\ (f) \to \mathbb{R}^m \left\{(x\ ,\ y) \in \mathbb{R}^{n+m} \middle|\, y = f\ (x)\right\}$$

$$r = 0:\ \ x = (\vartheta\ ,\ \varphi)\ ;\ \ f\ (x) := r = 0\ \ \text{(konstante Funktion)}$$

Satz 24: Kugelvolumen:

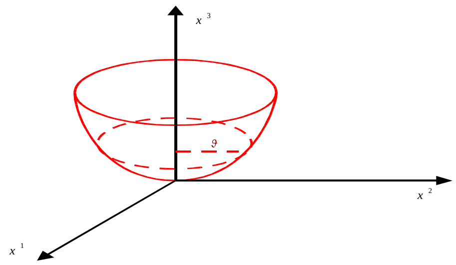
$$\int_0^{r_0} \left(\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{\left| \frac{\partial\ (x^2,\ x^2,\ x^3)}{\partial\ (r\ ,\ \vartheta\ ,\ \varphi)} \right|}_{r^2\ \sin\ \vartheta}\ \mathrm{d}\ \varphi\ \mathrm{d}\ \vartheta \right) \mathrm{d}\ r = 2\ \pi \int_0^{r_0} r^2 \left[-\cos\ \vartheta\right]_0^{r_0}\ \mathrm{d}\ r = 4\ \pi\ \frac{r^3}{3}\Bigg|_0^{r_0} = \frac{4\ \pi}{3}\ r_0^3$$

2.) Zylinderkoordinaten

$$x^2 = \varrho\ \cos\ \varphi\ ;\ x^2 = \varrho\ \sin\ \varphi\ ;\ x^3 = z\ ;$$

$$\frac{\partial(x^1, x^2, x^3)}{\partial(\varrho, \varphi, z)} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\varrho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \varrho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\det = \varrho;$$



Gleichung des Rotationsparaboloids:

$$a\,(x^1)^2 + a\,(x^2)^2 - x^3 = 0;\quad a > 0;$$

$$\to \underbrace{(x^1)^2 + (x^2)^2}_{=\varrho^2} = \frac{x^3}{a}$$

Berechnung des Volumens für $0 \le x^3 \le h$:

$$V = \int_0^h \int_0^{\sqrt{h/a}} \int_0^{2\pi} \left|\frac{\partial(x^1, x^2, x^3)}{\partial(\varrho, \varphi, z)}\right| \mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\varrho\,\mathrm{d}z = \int_0^h \int_0^{\sqrt{z/a}} \varrho \cdot 2\pi \cdot \mathrm{d}\varrho\,\mathrm{d}z = \pi \int_0^h \frac{z}{a}\,\mathrm{d}z = \frac{h^2\pi}{2a}$$

II. Kurven- und Flächenintegrale

1. Kurvenintegrale

Kurve: $\mathbb{R} \supset [a, b] \to \mathbb{R}^n$ (Parameterdarstellung einer Kurve)

Äquivalenzklasse von Parameterdarstellung $k(t) \sim l(s)$, wenn $k, l \in C^1$ und $\mathrm{d}t/\mathrm{d}s > 0$.

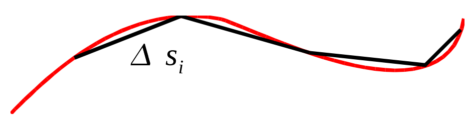
Definition 1: Sei $k : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ die Parameterdarstellung einer Kurve, dann heißt das Integral

$$\int_a^b \left| \frac{\mathrm{d}k(t)}{\mathrm{d}t} \right| \mathrm{d}t = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}k^1(t)}{\mathrm{d}t} \right)^2 + \ldots + \left(\frac{\mathrm{d}k^n(t)}{\mathrm{d}t} \right)^2} \, \mathrm{d}t$$

die **Länge** der Kurve.

$k^i(t)$: Komponenten von $k(t)$ in einem *orthonormierten* Koordinatensystem.

Bemerkung:



Arbeit = Kraft * Weg = $\langle \vec{F}, \vec{s} \rangle$

Ändert sich $\vec{F}$ oder $\vec{s}$ entlang des Wegs:

$\tilde{A} = \sum_{i=1}^{p} \langle \vec{F}_i, A\,\vec{s}_i \rangle$: F_i (Mittelwert von $\vec{F}$ auf dem Stück Δs_i) und Δs_i konstant auf Weg Δs_i

Einteilung feiner:

Ersetze Δs_i durch $\left. \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}t} \right|_{t_i} \Delta t$.

Limes $\Delta t \to 0$:

$$\tilde{A} = \sum_{i=1}^{p} \left\langle \vec{F}_i, \frac{\mathrm{d}k(t_i)}{\mathrm{d}t} \right\rangle \Delta t \to \int \left\langle \vec{F}, \frac{\mathrm{d}k(t)}{\mathrm{d}t} \right\rangle \mathrm{d}t$$

$\vec{F} = \vec{F}(k(t))$

Definition 2: Sei $k : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ die Parameterdarstellung einer Kurve und $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein *stetiges* Vektorfeld. Dann heißt

$$\int_k \langle A, \mathrm{d}x \rangle = \int_A \mathrm{d}x := \int_a^b \langle A(k(t)), \dot{k}(t) \rangle \, \mathrm{d}t$$

das **Kurvenintegral** von A längs der Kurve k.

Bemerkung: *Kurvenintegral ändert sich bei* zulässigen *Parametertransformationen nicht. Kurve* $k(t)$, *anderer Parameter* s *stelle* t *als Funktion von* s *dar:* $t : [c, d] \to [a, b]$, $t = t(s)$. *Dabei muss* $\mathrm{d}t(s)/\mathrm{d}s > 0$ *gelten für alle* $s \in [c, d]$.

$$\int_a^b \left\langle A(k(t)), \frac{d\,k(t)}{d\,t} \right\rangle d\,t = \int_a^b \left\langle A(k(t)), \frac{d\,k(t)}{d\,t}\frac{d\,t}{d\,s} \right\rangle \frac{d\,s}{d\,t}\, d\,t$$
$$= \int_c^d \left\langle A(k(t(s))), \frac{d\,k(t(s))}{d\,s} \right\rangle d\,s$$

Weitere Beispiele:

- Elektrische Spannung:
  $U(y) = -\int_k E(x)\, d\,x$
- Magnetische Spannung:
  $V(y) = \int_k H(x)\, d\,x$
- Zirkulation Z einer Flüssigkeit mit Geschwindigkeitsfeld v längs einer geschlossenen Kurve k ist definiert durch
  $Z = \int_k v\, d\,x$
- Wirkung in der klassischen Mechanik: $\vec{q}_a(t)$ Kurve im $\mathbb{R}^3$:
  $$\int \sum_i p_i\, \dot{q}_i\, d\,t = \int \sum_{\text{Teilchen } x} \left\langle \vec{p}_\alpha, \frac{d\,\vec{q}_\alpha}{d\,t} \right\rangle d\,t$$
  Aus
  $\sum_\alpha \langle \vec{p}_\alpha, \dot{q}_\alpha \rangle = 2 \cdot T = 2 \cdot$ kinetische Energie
  folgt:
  Wirkung $= 2 \int T\, d\,t$.

Rechenbeispiel: elektrisches Feld:

$$E(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{|x|^3}\, x,\ x \in \mathbb{R}^3$$

(affiner Raum)

$$U(x) = -\int_{y_0}^{y} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{|x|^3} \underbrace{\langle x, d\,x \rangle}_{=\sum x^i\, d\,x^i} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\frac{1}{|y_0|}}^{\frac{1}{|y|}} d\,\frac{1}{|x|} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{|y|} - \frac{1}{|y_0|}\right)$$

Nebenrechnung:

$$\frac{d\left(\frac{1}{|x|}\right)}{d\,x^1} = \frac{d\,\frac{1}{\sqrt{x^2}}}{d\,x^1} = -\frac{1}{2}\,\frac{2\,x^i\, d\,x^i / d\,x^1}{|x|^3} = -\frac{\langle x, d\,x \rangle}{|x|^3}$$

***Bemerkung**: Kurvenintegrale der Definition 2 werden in der Literatur oft **Kurvenintegrale 2. Art** genannt. Kurvenintegral 1. Art: Gegeben Parameterdarstellung einer Kurve $k: [a, b] \to \mathbb{R}^n$, dann ist das Kurvenintegral 1. Art:*

$$\int_a^b f(k(t)) \left|\frac{d\,k(t)}{d\,t}\right| d\,t$$

mit einem $f: \mathbb{R}^n \supset D(f) \to \mathbb{R}$.

Falls

$$\left|\frac{\mathrm{d}\,k(t)}{\mathrm{d}\,t}\right| = 0$$

für höchstens endlich viele t gilt, kann man das Kurvenintegral 1. Art als Spezialfall des Kurvenintegrals 2. Art auffassen:

$$\int \langle A, \mathrm{d}\underset{x=k(t)}{x}\rangle = \int \left\langle A, \frac{\mathrm{d}\,x}{\underbrace{\mathrm{d}\,x}_{\dot{k}(t)}}\right\rangle = \int \langle A, \dot{k}\rangle\,\mathrm{d}\,t$$

$$= \int f(k(t))\,\frac{\langle \dot{k}(t), \dot{k}(t)\rangle}{|\dot{k}(t)|}\,\mathrm{d}\,t = \int f(k(t))\,|\dot{k}(t)|\,\mathrm{d}\,t\,;$$

setze:

$$A(k(t)) := f(k(t))\cdot \dot{k}(t)/|\dot{k}(t)|$$

Beispiel:

1.) Länge einer Kurve nach Definition 1

2.) Fermats Prinzip
Zeit, die Licht auf einer Kurve k benötigt:

$$\int_k n\,\mathrm{d}\,x := \int_k n \left|\frac{\mathrm{d}\,k}{\mathrm{d}\,t}\right| \mathrm{d}\,t$$

ist minimal

$$k : [a, b] \to \mathbb{R}^n$$

Satz 3: Ist $k : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ die Parameterdarstellung einer Kurve und $c \in [a, b]$, so definiert die Einschränkung von k auf $[a, c]$ und auf $[c, b]$ eine Parameterdarstellung k_1 bzw. k_2 von Teilkurven von k. Damit gilt:

$$\int_k A\,\mathrm{d}\,x = \int_{k_1} A\,\mathrm{d}\,x + \int_{k_2} A\,\mathrm{d}\,x$$

Definition und Satz 4: Ist $k : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ die Parameterdarstellung einer Kurve, so versteht man unter der **umgekehrt durchlaufenen Kurve** („**Umkehrung der Kurvenorientierung**") die Parameterdarstellung

$$-k : [-b, -a] \to \mathbb{R}^n\,; -k(t) := k(-t)\,.$$

Damit gilt:

$$\int_k A\,\mathrm{d}\,x = -\int_{-k} A\,\mathrm{d}\,x\,.$$

Satz 5: Die Abbildung $A : M \to \mathbb{R}^n$ sei stetig auf einer offenen Menge $M \subset \mathbb{R}^n$. Das Kurvenintegral

$$\int_k A\,\mathrm{d}\,x$$

ist genau dann wegunabhängig, wenn es eine Funktion $u : M \to \mathbb{R}$ gibt mit $A = \mathrm{grad}\ u$.

u heißt **Potenzial** von A.

Beweis:

„$\Rightarrow$": Ist das Kurvenintegral wegunabhängig, so definiert man für ein beliebiges $x_0 \in M$:

$$u(x) := \int_k \langle A, \mathrm{d}\,x\rangle\,,$$

wo k eine beliebige (stückweise stetig differenzierbare) Parameterdarstellung zwischen x_0 und x ist. Damit gilt in kartesischen Koordinaten:

$$D_i(h) := \frac{1}{h}\left(u(x + h\, e_i) - u(x)\right) = \frac{1}{h}\int_x \langle A(k(t)), \mathrm{d}\, x\rangle \quad (\, e_i : \text{i-ter Einheitsvektor})$$

mit $k(t) := x + t\, e_i$:

$$D_i(h) = \frac{1}{h}\int_0^h \langle A(k(t)), \dot{k}(t)\rangle \,\mathrm{d}\, t = \frac{1}{h}\int_0^h A^i(x + t\, e_i)\,\mathrm{d}\, t$$

M offen $\Rightarrow$ zu jedem $x \in M$ existiert ein $h > 0$ mit $k([0, h]) \subset M$.

Mittelwertsatz der Differenzialrechnung $D_i(h) = A^i(x + \xi\, e_i)$ mit einem $\xi \in [0, h]$:

$$\frac{\partial\, u(x)}{\partial\, x^i} = \lim_{h \to 0} D_i(h) = A^i(x)$$

Stetigkeit von $A \Rightarrow$:

$$\lim_{\xi \to 0} A^i(x + \xi\, e_i) = A^i(x)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial\, u}{\partial\, x^1}, \ldots, \frac{\partial\, u}{\partial\, x^n}\right) = A$$

M nicht (bogen-)zusammenhängend:

Für jede zusammenhängende Teilmenge wählt man ein eigenes x_0.

„$\Leftarrow$“: Ist u ein Potenzial von A, $x_1, x_2 \in M$ und $k : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ mit $k(a) = x_1$, $k(b) = x_2$, $k([a, b]) \subset M$, so gilt nach der Kettenregel: in kartesischen Koordinaten:

$$\int_k A\,\mathrm{d}\, x = \int_a^b \left\langle A(k(t)), \frac{\mathrm{d}\, k(t)}{\mathrm{d}\, t}\right\rangle \mathrm{d}\, t = \int_a^b \left.\frac{\partial\, u(x)}{\mathrm{d}\, t}\right|_{x = k(t)} \frac{\mathrm{d}\, k^i(t)}{\mathrm{d}\, t}\,\mathrm{d}\, t = \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, t}\underbrace{(u \circ k)}_{= u(k(t))}\,\mathrm{d}\, t$$

$$= u(k(b)) - u(k(a)) = u(x_2) - u(x_1),$$

d.h. das Integral hängt nur von x_1 und x_2, aber nicht von k ab.

Beispiele:

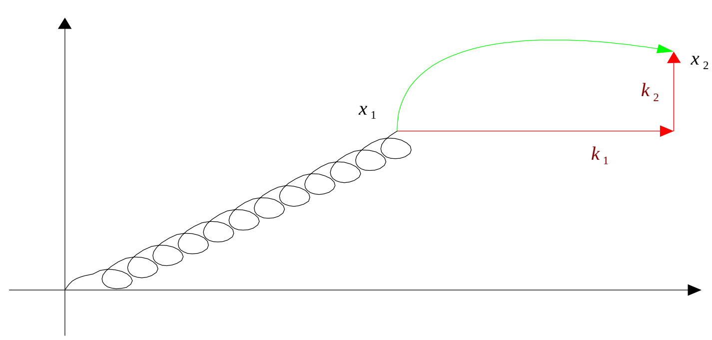
1.) Elektro*statik*::

$$\int_{y_0}^{y} E\,\mathrm{d}\, x$$

ist wegabhängig

2.) Analog: Magnetische Spannung: wegunabhängig, solange $\dot{D} = 0$ und $j = 0$

3.)



Federkonstante F; $x_1 = (2\,,\,2)$; $x_2 = (3\,,\,4)$; Arbeit $x_1 \to x_2$?
Kraft der Feder $A := -F\ x$, Potenzial:

$$u\,(x) := \frac{-F}{2}\,|x|^3$$

Wegunabhängigkeit!

1. Lösungsweg: $k = k_1 + k_2$;
   $k_1 : [0\,,\,1] \to \mathbb{R}^2$; $k_1\,(t) = (2\,,\,2) + (t\,,\,0)$, also $k\,(1) = (3\,,\,2)$;
   $k_2 : [0\,,\,2] \to \mathbb{R}^2$; $k_2\,(t) = (3\,,\,2) + (0\,,\,t)$;

$$V = -\int A\ \mathrm{d}\ x = \int_{k_1} F\ \left\langle x\ ,\ \underbrace{\frac{\mathrm{d}\ x}{\mathrm{d}\ t}}_{=(1\,,\,0)} \right\rangle \mathrm{d}\ t + \int_{k_2} F\ \left\langle x\ ,\ \underbrace{\dot{k}_2}_{=(0\,,\,1)} \right\rangle \mathrm{d}\ t$$

$$= F\ \int_0^1 x^1\,(k\,(t))\cdot 1\ \mathrm{d}\ t + F\ \int_0^2 x^2\,(k_2\,(t))\ 1\ \mathrm{d}\ t = F\ \int_0^1 (2+t)\ \mathrm{d}\ t + F\ \int_0^2 (2+t)\ \mathrm{d}\ t$$

$$= F\ \left(2 + \frac{1}{2}\right) + f\ (4+2) = 8{,}5\ F\ .$$

2. $$V = -\int A\ \mathrm{d}\ x = -\int \mathrm{grad}\ u\ (x)\ \mathrm{d}\ x = -\int \frac{\partial\ u\ (k\ (t))}{\partial\ x^i}\ \frac{\mathrm{d}\ k^i\ (t)}{\mathrm{d}\ t}\ \mathrm{d}\ t$$

$$= -\int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\ t}\,(u\ (k\ (t)))\ \mathrm{d}\ t = -u\ (k\ (t)) + u\ (k\ (a)) = +\frac{F}{2}\,(x_2)^2 - \frac{F}{2}\,(x_1)^2$$

$$= \frac{F}{2}\,(25-8) = 8{,}5\ F\ ;$$

2. Differenzialformen

Definition 6: Seien V, W Vektorräume über $K = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

a) Eine Abbildung $f : V \to W$ heißt **linear**, wenn für alle $X\,,\,Y \in V$ und alle $a\,,\,b \in K$ gilt:
   $f\ (a\ X + b\ Y) = a\ f\ (X) + b\ f\ (Y)$

b) Ist g eine weitere lineare Abbildung $V \to W$, so definiert man
   $(f+g)\,(X) := f\ (X) + g\ (X)$; $(a\ f)\,(X) = a \cdot f\ (X)$;
   Dadurch erhalten die linearen Abbildungen $V \to W$ die Struktur eines Vektorraums. Im Fall $W = \mathbb{R}$ heißt er **Dualraum** V^* von V, seine Elemente **Dualvektoren** oder **Kovektoren**.

c) Ordnet man jedem Punkt p des betrachteten Raumes M einen Kovektor zu, spricht man von einem **Kovektorfeld**, einer **Pfaffschen Form**, einer **1-Form** oder einer **Differenzialform 1. Stufe**.
   Allgemeiner heißt eine Abbildung, die jedem $p \in M$ eine lineare Abbildung $V \to W$ zuordnet, **W-wertige 1-Form**.

Beispiel:

a) Totales Differenzial einer Funktion $F : \mathbb{R}^n \to W$ ist für jedes $X \in \mathbb{R}^n$ wegen $X \to \mathrm{d}\ F\ (X)$

die Richtungsableitung (Werte in W)
$\Rightarrow$ $\mathrm{d}\,F$ ist W-wertige 1-Form.

b) Besitzt eine Kraft K ein Potenzial U, gilt also $K = -\mathrm{d}\,U$, so ist die Kraft kein Vektor, sondern ein Kovektor. Verhalten von Kräften Koordinatentransformationen (s.u.) $\Rightarrow$ alle Kräfte sind Kovektoren (nicht-relativistische Physik). K ist die lineare Abbildung $s \to K(s)$ = Arbeit, wo s den (geradlinigen) Weg bezeichnet.

c) In der nicht-relativistischen Physik ist die Zeit eine skalare Größe.
Impuls p: $K = \dot{p} \Rightarrow p$ ist ebenfalls Kovektor. p ist die lineare Abbildung $\dot{q} \to p(\dot{q}) = \text{Wirkung}$.

d) Viererimpuls P enthält als die ersten drei Komponenten p. Man folgert: P ist ein Kovektor.

e) Kraft ist Kovektor $\to$ elektrisches Feld ist 1-Form (in der nicht-relativistischen Physik).
Magnetfeld H und magnetischer Induktionsfluss (-dichte) B, Φ sind weder Vektorfelder, noch 1-Formen.

Basis des Dualraums V*

Sei V endlichdimensional und sei $(e_j)_{j=1}^n$ eine Basis von V. Es gibt Kovektoren d^i, $j = 1, \dots, n$ mit

$$d^j(e_k) = \delta^j_k = \begin{cases} 1 \text{ für } j = k \\ 0 \text{ für } j \neq k \end{cases}.$$

Zu zeigen:
$(d^j)_{j=1}^n$ bilden Basis von V^*:
d^j sind linear unabhängig. Seien $\alpha \in V^*$ und $X = X^j e_j \in V$ gegeben. Dabei benutzt: **Einsteinsche Summenkonvention**: Tritt derselbe Index j einmal als oberer und einmal als unterer Index auf, so wird über $j = 1, \dots, n$ (= Dimension des Raums) summiert.

Linearität von α:

$$\alpha(X) = \alpha(X^j e_j) = X^j \alpha(e_j)$$

$\Rightarrow$ α ist durch die Zahlen $\alpha(e_j)$ vollständig bestimmt. Setze

$$\alpha = \underbrace{\alpha(e_k)}_{\in \mathbb{R}} d^k$$

(Summenkonvention) $\Rightarrow$

$$\alpha(X) = \overbrace{\alpha(e_k)\, d^k}^{\alpha}(X^j e_j) = \alpha(e_k)\, X^j\, d^k(e_j) = \alpha(e_k)\, X^j\, \delta^k_j = \alpha(e_j)\, X^j$$

$\Rightarrow$ α ist Linearkombination der d^j; α war beliebig $\in V^*$ $\Rightarrow$ $(d^j)_{j=1}^n$ bilden Basis von V^*.
Man nennt $(d^j)_{j=1}^n$ **Dualbasis** von $(e_j)_{j=1}^n$.

Außerdem:

$$d^j(X) = X^j$$

$\langle X, Y\rangle \in \mathbb{R}$; $Y \to \langle X, Y\rangle$ für festes X

Satz 7: Ist der Vektorraum V endlichdimensional, so sind V und V^* isomorph. Ein Isomorphismus ist z.B. die Abbildung $e_j \to d^j$, die jedem Basisvektor den zugehörigen Kovektor der Dualbasis zuordnet.

Besitzt ein (affiner) Raum V die Koordinaten x_j, $j = 1, \ldots, n$, und ist $(e_j)_{j=1}^n$ die zugehörige Basis im Punkt $p \in V$, so wird die Dualbasis mit $(d\,x^j)_{j=1}^n$ bezeichnet. Die $d\,x^j$ sind totale Differenziale der Koordinatenfunktionen x^j.

Beispiel: Polarkoordinaten. Basis $(e_j)_{j=1}^3$, im Punkt p des 3-dimensionalen Raumes:
e_1: Vektor in r-Richtung der Länge 1,
e_2: Vektor in ϑ-Richtung der Länge r (*nicht* Länge 1), anschauliche Deutung:

$$e_2 = \frac{\partial\, p}{\partial\, \vartheta} = \lim_{\Delta\,\vartheta \to 0} \left(\frac{p(r, \vartheta + \Delta\,\vartheta, \varphi) - p(r, \vartheta, \varphi)}{\Delta\,\vartheta} \right),$$

und

$$e_3 := \frac{\partial\, p}{\partial\, \varphi}$$

Vektor in φ-Richtung der Länge $r \sin \vartheta$.
Ist $(b_j)_{j=1}^3$ Basis in kartesischen Koordinaten, so folgt:
(Beispiel 1 zu Satz I.26, dort x^j statt p^j)

$$e_1 = \frac{p}{|p|} = \frac{(p^1\, b_1 + p^2\, b_2 + p^3\, b_3)}{\sqrt{(p^1)^2 + (p^2)^2 + (p^3)^2}}$$

$$e_2 = \frac{\partial\, p}{\partial\, \vartheta} = r \cos \vartheta \cos \varphi\; b_1 + r \cos \vartheta \sin \varphi\; b_2 - r \sin \vartheta\; b_3;$$

$$e_3 = \frac{\partial\, p}{\partial\, \varphi} = -r \sin \vartheta \sin \varphi\; b_1 + r \sin \vartheta \cos \varphi\; b_2;$$

Dualbasis $(\mathrm{d}\; p^j)_{j=1}^3$

$$\mathrm{d}\; r = \frac{p^1\, \mathrm{d}\; p1 + p^2\, \mathrm{d}\; p^2 + p^3\, \mathrm{d}\; p^3}{\sqrt{(p^1)^2 + (p^2)^2 + (p^3)^2}};$$

$$\mathrm{d}\; \vartheta = \frac{\cos \vartheta \cos \varphi\, \mathrm{d}\; p^1 + \cos \vartheta \sin \varphi\, \mathrm{d}\; p^2 + \sin \vartheta\, \mathrm{d}\; p^3}{r};$$

$$\mathrm{d}\; \varphi = \frac{-\sin \varphi\, \mathrm{d}\; p^1 + \cos \varphi\, \mathrm{d}\; p^2}{r \sin \vartheta};$$

Beweis: Prüfe die neuen Beziehungen
$\mathrm{d}\; r(e_1) = 1$, $\mathrm{d}\; \vartheta(e_2) = 0$, $\mathrm{d}\; \varphi(e_3) = 1$
nach [...]

Koordinatentransformationen

Zwei Basen $(e_j)_{j=1}^n$ und $(e_{j'})_{j'=1}^n$

Kern-Index-Schreibweise: j und j' unabhängige Indizes

$e_{j'} = T_{j'}^{j}$;
inverse Matrix: $T_j^{j'}$

Gegeben: Vektor $X = X^j\, e_j$ unabhängig von der benutzten Basis:
$X = X^j\, e_j = X^{j'}\, e_{j'} = X^{j'}\, T_{j'}^j\, e_j$
(Eindeutigkeit der Basisdarstellung)

$X^j = T^j_{j'} X^{j'} \Leftrightarrow X^{j'} = T^{j'}_j X^j$

Kovektor $\alpha = \alpha_j d^j = \alpha_{j'} d^{j'}$, wo
$(d^j)^n_{j=1}$ die Dualbasis von $(e_j)^n_{j=1}$ und
$(d^{j'})^n_{j'=1}$ die von $(e_{j'})^n_{j'=1}$ ist.

$\alpha(X) = (\alpha_j d^j)(X^k e_k) = \alpha_j X^j = \alpha_{j'} T^{j'}_j X^j$, d.h. $\alpha_j = \alpha_{j'} T^{j'}_j$ bzw. $\alpha_{j'} = \alpha_j T^j_{j'}$

α unabhängig von der gewählten Basis:
$\alpha = \alpha_{j'} d^{j'} = \alpha_j d^j = \alpha_{j'} T^{j'}_j d^j$
$\Rightarrow \; d^{j'} = T^{j'}_j d^j$.

Beispiel Arbeit: $K(s) = K_j s^j = K_{j'} s^{j'}$
$K(e_j) = \langle F, e_j \rangle$; $j = 1, \dots, m$;

Kovektor entspricht Abbildung: gegeben: Y definiert eine lineare Abbildung $X \to \langle Y, X \rangle$
Vektoren: Komponenten transformieren sich wie Kovektoren: $X^j \to X^{j'} = T^{j'}_j X^j$,
$\alpha_j \to \alpha_{j'} = T^j_{j'} \alpha_j$

Vektoren und Kovektoren brauchen nicht unterschieden zu werden, wenn $T = (T^{j'}_j) = (T^{-1})^t$, d.h. wenn T eine orthogonale Transformationsmatrix ist.

$\Rightarrow$ Falls man sich auf orthonormierte Basen beschränkt, dürfen Vektoren und Kovektoren gleichgesetzt werden.

Definition 9:

a) Seien V und W Vektorräume über $K = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Ein **W-wertiger $(0, p)$-Tensor** t ist eine Abbildung
$t: V \times V \times \ldots \times V \to W$,
die in jedem der p Exemplare V linear ist.
Lässt man „W-wertig“ weg, meint man „$\mathbb{R}$-wertig“.

b) Ist t außerdem in allen p Argumenten antisymmetrisch, d.h.
$t(X_1, \dots, X_j, \dots, X_k, \dots, X_n) = -t(X_1, \dots, X_k, \dots, X_j, \dots, X_n)$,
so nennt man t **alternierend** oder **vollantisymmetrisch**.

c) Ordnet man jedem Punkt p des betrachteten Raumes einen (W-wertigen) alternierenden $(0, p)$-Tensor zu, spricht man von einer **(W-wertigen) p-Form** oder **Differenzialform** p-ter Stufe.

10. Beispiele

a) Die Metrik eines Vektorraums V liefert für 2 beliebige Vektoren $X, Y \in V$ das Skalarprodukt $\langle X, Y \rangle$ $\Rightarrow$ Skalarprodukt ist $(0, 2)$-Tensor symmetrisch!

b) 2. Ableitung $\mathrm{d}^2 f$ einer Funktion $f: \mathbb{R}^n \to W$ bestimmt in allen Punkten $p \in \mathbb{R}^n$ für alle Vektoren $X, Y \in \mathbb{R}^n$ den Wert
$\mathrm{d}^f(p)(X, Y) \in W \Rightarrow \mathrm{d}^2 f(p)$ ist $(0, 2)$-Tensor, $\mathrm{d}^2 f$ ist (W-wertiges) $(0, 2)$-Tensorfeld. Falls $f \in C^2$: $\mathrm{d}^2 f$ ist symmetrisch.

c) Trägheitstensor

d) Lorentztransformation $\Rightarrow$ E, B bzw. D und H werden ineinander transformiert $\Rightarrow$ man muss sie in jeweils 1 geometrisches Objekt zusammenfassen:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & E_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & E_2 \\ B_2 & -B_1 & 0 & E_3 \\ -E_1 & -E_2 & -E_3 & 0 \end{pmatrix}$$

$\varepsilon \cdot \mu \cdot c^2 = 1$;

2-Form $\zeta = \frac{1}{\mu} F$:

$$\zeta = \begin{pmatrix} 0 & H_3 & -H_2 & c^2 D_1 \\ -H_3 & 0 & H_1 & c^2 D_2 \\ H_2 & -H_1 & 0 & c^2 D_3 \\ -c^2 D_1 & -c^2 D_2 & -c^2 D_3 & 0 \end{pmatrix}$$

Definition 11: Sei V ein Vektorraum, s ein $(0, p)$-Tensor (-feld) und t ein $(0, q)$-Tensor (-feld).
Dann ist das **Tensorprodukt** $s \otimes t$ ein $(0, p+q)$-Tensor (-feld), das für alle $A, \ldots, B, X, \ldots, Y \in V$ durch
$s \otimes t(A, \ldots, B, X, \ldots, Y) := s(A, \ldots, B) \cdot t(X, \ldots, Y)$
definiert ist.

Beispiele:

1) Sei $n = 2$, $X = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $Y = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$

$\mathrm{d}x^1(X) = \mathrm{d}x^1(4e_1 + 5e_2) = 4 \cdot 1$; $\mathrm{d}x^j(e_k) = \delta^j_k$;

$\mathrm{d}x^1 \otimes \mathrm{d}x^2(X, Y) = \mathrm{d}x^1(X) \cdot \mathrm{d}x^2(Y) = 4 \cdot 7 = 28$;

$\mathrm{d}x^2 \otimes \mathrm{d}x^1(X, Y) = 5 \cdot 6 = 30$;

2) Wie 10b): Statt $\mathrm{d}^2 f(p)(X, Y)$ schreibt man:

$$\mathrm{d}^2 f(p)(X, Y) = \frac{\partial^2 f(p)}{\partial x^j \, \partial x^k} \mathrm{d}x^j \otimes \mathrm{d}x^k (X, Y);$$

$$\mathrm{d}^3 f(p)(X, Y, Z) = \frac{\partial^3 f(p)}{\partial x^j \, \partial x^k \, \partial x^l} \mathrm{d}x^j \otimes \mathrm{d}x^k \otimes \mathrm{d}x^l (X, Y, Z)$$

Tensorprodukt: Weder symmetrisch noch antisymmetrisch. $\Rightarrow$ Wenn α, β Differenzialformen sind, dann ist $\alpha \otimes \beta$ *keine*.

$$s \otimes t(\overset{1}{x}, \overset{2}{x}) = \underbrace{s(\overset{1}{x})}_{\in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{t(\overset{2}{x})}_{\in \mathbb{R}}$$

$(0, 1)$-Tensoren s, t

symmetrischer Teil:

$$\frac{1}{2}\left(s(\overset{1}{x}) \cdot t(\overset{2}{x}) + s(\overset{2}{x}) \cdot t(\overset{1}{x}) \right) =: S$$

antisymmetrischer Teil:

$$\frac{1}{2}\left(s\,(\overset{1}{x})\cdot t\,(\overset{2}{x})-s\,(\overset{2}{x})\cdot t\,(\overset{1}{x})\right)=:\,A$$

$$s\,(\overset{1}{x})\cdot t\,(\overset{2}{x})=S+A$$

Definition 12: Ist s ein antisymmetrischer $(0\,,\,p)$-Tensor und t ein antisymmetrischer $(0\,,\,q)$-Tensor, so ist das **äußere Produkt** oder **Graßmann-Produkt** $s\wedge t$ definiert als:

$$s\wedge t\,(X_1\,,\,\dots\,,\,X_{p+q}):=\frac{1}{(p+q)!}\sum_{\sigma=\pi\,(p+q)}\operatorname{sign}(\sigma)\,s\otimes t\,(X_{\sigma(1)}\,,\,\dots\,,\,X_{\sigma(p+q)})$$

Dabei bezeichnen $\pi\,(p+q)$ die Gruppe der Permutationen der Zahlen $1\,,\,\dots\,,\,p+q$ und $\operatorname{sign}(\sigma)$ das Signum der Permutation $\sigma\in\pi\,(p+q)$.

Beachte: *Viele Autoren verwenden* $\dfrac{1}{p!\,q!}$ *statt* $\dfrac{1}{(p+q)!}$.

Beispiele:

1) $s:=\mathrm{d}\,x^1+5\,\mathrm{d}\,x^2\,;\;t:=3\,\mathrm{d}\,x^2\,;$

$$s\wedge t=\frac{1}{2}\left[(\mathrm{d}\,x^1+5\,\mathrm{d}\,x^2)\otimes 3\,\mathrm{d}\,x^2-3\,\mathrm{d}\,x^2\otimes(\mathrm{d}\,x^1+5\,\mathrm{d}\,x^2)\right]$$

$$=\frac{3}{2}\left[\mathrm{d}\,x^1\otimes\mathrm{d}\,x^2-\mathrm{d}\,x^2\otimes\mathrm{d}\,x^1\right]=3\,\mathrm{d}\,x^1\wedge\mathrm{d}\,x^2$$

2) $\operatorname{sign}(1\,,\,2\,,\,3,\,4)=\operatorname{sign}(3\,,\,4\,,\,1\,,\,2)\;\Rightarrow\;t:=\mathrm{d}\,x^1\wedge\mathrm{d}\,x^2+\mathrm{d}\,x^3\wedge\mathrm{d}\,x^4\,;$

$$t\wedge t=\frac{1}{2}\left[(\mathrm{d}\,x^1\wedge\mathrm{d}\,x^2+\mathrm{d}\,x^3\wedge\mathrm{d}\,x^4)\otimes(\mathrm{d}\,x^1\wedge\mathrm{d}\,x^2+\mathrm{d}\,x^3\wedge\mathrm{d}\,x^4)\right]+(1\,,\,2\leftrightarrow 3\,,\,4)=\dots=$$

;

$$t\wedge t=\frac{1}{2}\left[\mathrm{d}\,x^1\wedge\mathrm{d}\,x^2\otimes\mathrm{d}\,x^3\wedge\mathrm{d}\,x^4+\mathrm{d}\,x^3\wedge\mathrm{d}\,x^4\otimes\mathrm{d}\,x^1\wedge\mathrm{d}\,x^2\right.$$

$$\left.+\mathrm{d}\,x^1\wedge\mathrm{d}\,x^2\otimes\mathrm{d}\,x^3\wedge\mathrm{d}\,x^4+\mathrm{d}\,x^3\wedge\mathrm{d}\,x^4\otimes\mathrm{d}\,x^1\wedge\mathrm{d}\,x^2\right]\neq 0$$

vgl.:

$$\mathrm{d}\,x^1\wedge\mathrm{d}\,x^2\,(X_1\,,\,X_2)=\frac{1}{2}\,(\mathrm{d}\,x^1\otimes\mathrm{d}\,x^2)\left[(X_1\,,\,X_2)-(X_2\,,\,X_1)\right]=\frac{1}{2}\,(X_1^1\,X_2^2-X_2^1\,X_1^2)$$

3) Für jeden $(0\,,\,1)$-Tensor t gilt: $t\wedge t=0$, aber nicht notwendig für $(0\,,\,p)$-Tensoren ($p\neq 1$).

4) Zahlenbeispiel:

$s=3\,\mathrm{d}\,x^1+5\,\mathrm{d}\,x^2$ (ist ein $(0\,,\,1)$-Tensor)
$t=4\,\mathrm{d}\,x^1\otimes\mathrm{d}\,x^2$ (ist ein $(0\,,\,2)$-Tensor)
$u=4\,\mathrm{d}\,x^1\wedge\mathrm{d}\,x^2$ (ist ein $(0\,,\,2)$-Tensor; antisymmetrisch, d.h. 2-Form)

$X_1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\;X_2=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix},\;X_3=\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix};$

$s\,(X_1)=3\cdot 1+5\cdot 2=13\,;\;\;s\,(X_2)=3\cdot 3+5\cdot 4=29\,;$
$t\,(X_1\,,\,X_2)=4\cdot 4=16\,;\;\;t\,(X_2\,,\,X_3)=4\cdot 3\cdot 6\,;$
$s\otimes t\,(X_1\,,\,X_2\,,\,X_3)=s\,(X_1)\cdot t\,(X_2\,,\,X_3)=13\cdot 72\,;$

$$u(X_1, X_2) = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \mathrm{d}\,x^1 \otimes \mathrm{d}\,x^2 \left[(X_1, X_2) - (X_2, X_1)\right] = 2\left[1 \cdot 4 - 3 \cdot 2\right] = -4\,;$$

$$s \wedge u(X_1, X_2, X_3) = \frac{4}{6}(3\,\mathrm{d}\,x^1 + 5\,\mathrm{d}\,x^2) \otimes (\mathrm{d}\,x^1 \wedge \mathrm{d}\,x^2)\left[(X_1, X_2, X_3) - (X_2, X_1, X_3) + \right.$$

$$= \frac{3}{2}\,\frac{4}{6}\left[\mathrm{d}\,x^1 \otimes (\mathrm{d}\,x^1 \otimes \mathrm{d}\,x^2 - \mathrm{d}\,x^2 \otimes \mathrm{d}\,x^1)\right.$$
$$-\mathrm{d}\,x^1 \otimes \mathrm{d}\,x^1 \otimes \mathrm{d}\,x^2 - \mathrm{d}\,x^2 \otimes \mathrm{d}\,x^1 \otimes \mathrm{d}\,x^1$$
$$\left.+\mathrm{d}\,x^2 \otimes \mathrm{d}\,x^1 \otimes \mathrm{d}\,x^1 - \mathrm{d}\,x^1 \otimes \mathrm{d}\,x^2 \otimes \mathrm{d}\,x^1\right] = 0$$

Satz 13: Seien s ein $(0, p)$-Tensor, t ein $(0, q)$-Tensor und u ein $(0, r)$-Tensor; alle drei seien antisymmetrisch. Dann gilt:

a) $s \wedge t = (-1)^{p+q}\, t \wedge s$

b) $(s \wedge t) \wedge u = s \wedge (t \wedge u)$

c) Für $p = q$ definiert man
$(s + t)(X, \ldots, Y) := s(X, \ldots, Y) + t(X, \ldots, Y)$.
Damit folgt: $(s + t) \wedge u = s \wedge u + t \wedge u$.

$f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$

$$\mathrm{d}\,f = \frac{\partial f}{\partial x^i}\,\mathrm{d}\,x^i$$

(Summenkonvention: i in ∂x^i zählt als *unterer* Index)

Koordinatentransformation:

$$T^i_{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \Rightarrow \mathrm{d}\,f = \frac{\partial f}{\partial x^{i'}}\,\mathrm{d}\,x^{i'} = \frac{\partial f}{\partial x^i}\,T^i_{i'}\,T^{i'}_i\,\mathrm{d}\,x^i = \frac{\partial f}{\partial x^i}\,\mathrm{d}\,x^i$$

Partielle Ableitungen von Komponenten von Vektoren oder Kovektoren sind „kompliziert“.

$$X_{,k} := \underbrace{X^i_{\;,k}}_{=\frac{\partial X^i}{\partial x^k}}\,e_i$$

Koordinatentransformation: $X^i \to T^{i'}_i\,X^i$;

$$X^i_{\;,k} \to (T^{i'}_i\,X^i)_{,k} = \underbrace{T^{i'}_{i,k}}_{=\frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^i\,\partial x^k}}\,X^i + T^{i'}_i\,X^i_{\;,k}$$

***Bemerkung**: Jede p-Form α lässt sich in der Gestalt*

$$\alpha = \alpha_{\underbrace{i\,j\ldots k}_{p\text{ Indizes}}}\,\mathrm{d}\,x^i \wedge \mathrm{d}\,x^j \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}\,x^k$$

schreiben.

Beweis: Zu zeigen: Alle $\mathrm{d}\,x^i \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}\,x^k$ (p Faktoren) bilden Basis des Raumes der p-Formen.

1) Lineare Unabhängigkeit: Wende $\mathrm{d}\,x^i \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}\,x^k$ auf $(e_l, \ldots, e_m)$ an:
Ergebnis $\neq 0 \Leftrightarrow (l, \ldots, m)$ ist Permutation von $(i, \ldots, k)$
$\mathrm{d}\,x^i \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}\,x^k (e_l, \ldots, e_m)$ (mit $\mathrm{d}\,x^i(e_a) = \delta^i_a \Rightarrow \mathrm{d}\,x^i \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}\,x^k(e_l, \ldots, e_m)$) $\neq 0$
nur, wenn i in $l, \ldots, m$ vorhanden ist. Also $\mathrm{d}\,x^i \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}\,x^k(e_l, \ldots, e_m) \neq 0$

$\Leftrightarrow (l, \dots, m)$ ist Permutation von $(i, \dots, k)$ (und alle Indizes sind verschieden).

2) $\mathrm{d}\, x^i \wedge \dots \wedge \mathrm{d}\, x^k$ spannen den Raum der p-Formen in $\mathbb{R}^n$ auf: Wie viele total antisymmetrische Objekte (in p Stellen) gibt es im $\mathbb{R}^n$?
$\alpha(X_1, \dots, X_p):$

Definition 14: Die **äußere Ableitung** einer p-Form
$t = t_{j\dots k}\, \mathrm{d}\, x^j \wedge \dots \wedge \mathrm{d}\, x^k$
ist die $(p+1)$-Form

$$\mathrm{d}\, t := \underbrace{(\mathrm{d}\, t_{j\dots k})}_{\text{totales Diff. d. Funktion } t_{i\dots k}} \wedge \mathrm{d}\, x^j \wedge \dots \wedge \mathrm{d}\, x^k = \sum_{j,k,l=1}^{n} \frac{\partial t_{j\dots k}}{\partial x^l}\, \mathrm{d}\, x^l \wedge \mathrm{d}\, x^j \wedge \dots \wedge$$

.
Dabei ist das Summenzeichen nicht nötig: l in $\partial / \partial x^l$ zählt als unterer Index.

Beispiel: $\alpha = \alpha_i\, \mathrm{d}\, x^i$. Partielle Ableitung $\alpha_{i,k}$

$$\alpha_i \underset{B}{\rightarrow} T^i_{i'}\, \alpha_i \equiv \alpha_{i'} \Rightarrow \alpha_{i,k} \rightarrow \left(T^i_{i'}, \alpha_i\right)_{,k} = T^i_{i',k}\, \alpha_i + T^i_{i'}\, \alpha_{i,k}$$

$$T^i_{i',k} = \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\right) = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}\frac{\partial}{\partial x^{k'}}\left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\right) = T^{k'}_k \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{k'}\, \partial x^{i'}}$$

C^2-Abbildungen:

$$\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{k'}\, \partial x^{i'}}$$

ist symmetrisch in k', i'.

$$\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{k'}\, \partial x^{i'}}\, \mathrm{d}\, x^{k'} \wedge \mathrm{d}\, x^{i'} = 0$$

$$\alpha_{i,k}\, \mathrm{d}\, x^k \wedge \mathrm{d}\, x^i \rightarrow \alpha_{i',k'}\, \mathrm{d}\, x^{k'} \wedge \mathrm{d}\, x^{i'}$$

1) $t := \sum_{j=1}^{3} x^j\, \mathrm{d}\, x^j \Rightarrow \mathrm{d}\, t = \sum_{j=1}^{3} \mathrm{d}\, x^j \wedge \mathrm{d}\, x^j = 0$

2) $t := x^1\, \mathrm{d}\, x^2 \wedge \mathrm{d}\, x^3 + \sin x^2\, \mathrm{d}\, x^1 \wedge \mathrm{d}\, x^2 + (x^2)^2\, \mathrm{d}\, x^1 \wedge \mathrm{d}\, x^3$
$\mathrm{d}\, t = \mathrm{d}\, x^1 \wedge \mathrm{d}\, x^2 \wedge \mathrm{d}\, x^3 + \cos x^2\, \mathrm{d}\, x^2 \wedge \mathrm{d}\, x^1 \wedge \mathrm{d}\, x^2 + 2\, x^2\, \mathrm{d}\, x^2 \wedge \mathrm{d}\, x^1 \wedge \mathrm{d}\, x^3$
$= (1 - 2\, x^2)\, \mathrm{d}\, x^1 \wedge \mathrm{d}\, x^2 \wedge \mathrm{d}\, x^3$

3) Maxwell-Tensor:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & E_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & E_2 \\ B_2 & -B_1 & 0 & E_3 \\ -e_1 & -E_2 & -E_3 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{d}\, F$: Faktoren von $\mathrm{d}\, x^1 \wedge \mathrm{d}\, x^2 \wedge \mathrm{d}\, x^3$
$\mathrm{d}\, F = (F_{23,1} - F_{21,3} + F_{31,2} - F_{32,1} + F_{12,3} - F_{13,2}) = 2\,(B_{1,1} + B_{2,2} + B_{3,3}) = 2 \operatorname{div} B$

Faktor von $\mathrm{d}\, x^1 \wedge \mathrm{d}\, x^3 \wedge \mathrm{d}\, x^4$:

$$\frac{\partial}{\partial x^1}(F_{34} - F_{43}) + \frac{\partial}{\partial x^3}(F_{41}\, F_{14}) + \frac{\partial}{\partial x^4}(F_{13} - F_{31}) = 2\,\underbrace{(E_{3,1} - E_{1,3} - B_{2,4})}_{\text{2. Komponente von } -\operatorname{rot} E - \dot{B}};$$

$\mathrm{d}\ F = 0 \Leftrightarrow$ homogene Maxwellgleichung
$F_{i\,k}\ \mathrm{d}\ x^i \wedge \mathrm{d}\ x^k$;
$\mathrm{d}\ F = (\mathrm{d}\ F_{i\,k}) \wedge \mathrm{d}\ x^i \wedge \mathrm{d}\ x^k = \left(\frac{\partial\ F_{i\,k\,,\,l}}{\partial\ x^l}\ \mathrm{d}\ x^l \right) \wedge \mathrm{d}\ x^i \wedge \mathrm{d}\ x^k$;

4) Vektorpotenzial $\vec{A}$: $B = \mathrm{rot}\ \vec{A}$
Elektrostatik: $E = \mathrm{d}\ U$
Elektrodynamik: $E = \mathrm{d}\ U - \dot{\vec{A}}$
Definiere Vektorpotenzial $A := (\vec{A}\ ,\ U) \Rightarrow F = 2\ \mathrm{d}\ A$
$F_{1\,2} = B_3 = A_{2\,,\,1} - A_{1\,,\,2} = (\mathrm{rot}\ \vec{A})_3$
$F_{1\,4} = E_1 = A_{4\,,\,1} - A_{1\,,\,4} = U_{\ ,\,1} - \vec{A}_{1\,,\,4} = (\mathrm{d}\ U - \dot{\vec{A}})_1$
$\mathrm{d}\ A = \mathrm{d}\ (A_i\ \mathrm{d}\ x^i) = \frac{\partial\ A_i}{\partial\ x^4}\ \mathrm{d}\ x^k \wedge \mathrm{d}\ x^i$

Zitat: *„Mathematik ist was furchtbar Einfaches, aber damit es nicht jeder Idiot versteht, macht man's furchtbar kompliziert.“*

Satz 15: Für jede zweimal stetig differenzierbare W-wertige Differenzialform
$t = t_{j\,\ldots\,k}\ \mathrm{d}\ x^j \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}\ x^k$
(d.h. $t_{j\,\ldots\,k}$ ist eine C^2-Funktion) gilt:
$\mathrm{d}\ \mathrm{d}\ t = 0$.

Beweis: $t = t_{j\,\ldots\,k}\ \mathrm{d}\ x^j \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}\ x^k$;
2. Ableitung:

$$\frac{\partial^2\ t_{j\,\ldots\,k}}{\partial\ x^i\ \partial\ x^l}\ \mathrm{d}\ x^i \wedge \mathrm{d}\ x^l\ (\ \wedge \mathrm{d}^j \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}\ x^k) = \frac{1}{2}\ \frac{\partial^2\ t_{j\,\ldots\,k}}{\partial\ x^i\ \partial\ x^l}\ (\mathrm{d}\ x^i \wedge \mathrm{d}\ x^l - d\ \mathrm{x}^l \wedge \mathrm{d}\ x^i)$$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{\left(\frac{\partial^2\ t_{j\,\ldots\,k}}{\partial\ x^i\ \partial\ x^l} - \frac{\partial^2\ t_{j\,\ldots\,k}}{\partial\ x^l\ \partial\ x^i} \right)}_{=\,0\ \text{für}\ C^2\text{-Funktionen}\ t_{j\,\ldots\,k}}\ \mathrm{d}\ x^i \wedge \mathrm{d}\ x^l$$

Beispiel:

1) Für $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist $\mathrm{d}\ \mathrm{d}\ f$ der antisymmetrische Teil der 2. Ableitung
$\mathrm{d}\ \mathrm{d}\ f = 0$ heißt, dass die zweiten Ableitungen symmetrisch sind.

2) $F = 2\ \mathrm{d}\ A \Rightarrow$ homogene Maxwellgleichungen $\mathrm{d}\ F = 2\ \mathrm{d}\ \mathrm{d}\ A = 0$

Satz 16: Auf dem $\mathbb{R}^n$ sei $e_j \to e_{j'} = T^j_{j'}\ e_j$ eine Koordinatentransformation, bei der die Basis $(e_j)^n_{j=1}$ in die Basis $(e_{j'})^n_{j'=1}$ übergeht. Dann transformiert sich eine n-Form $t = t_{j\,\ldots\,k}\ \mathrm{d}\ x^j \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}\ x^k$ mit der Determinante von $T^j_{j'}$:
$t_{j'\,\ldots\,k'} = \det\ (T^j_{j'}) \quad t_{j\,\ldots\,k}$.

Beweis: t ist unabhängig vom Koordinatensystem:
$t = t_{j\,\ldots\,k}\ \mathrm{d}\ x^j \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}\ x^k = t_{j'\,\ldots\,k'}\ \mathrm{d}\ x^{j'} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}\ k' \underset{8}{=} t_{j'\,\ldots\,k'}\ T^{j'}_j\ \mathrm{d}\ x^j \wedge \ldots \wedge T^{k'}_k\ \mathrm{d}\ x^k$.
Die verschiedenen $\mathrm{d}\ x^j \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}\ x^k$ bilden eine *Basis* des Vektorraums der p-Formen. Hier $p = n$: Es genügt *eine* Kombination $\mathrm{d}\ x^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}\ x^n$.

$\Rightarrow$ Es genügt, $t_{1\,\ldots\,n}$ zu betrachten:

$t_{1\,2\,\ldots\,n} = T_1^{j'} \ldots T_n^{k'}\, t_{j'\ldots k'}$

Term auf der rechten Seite: $= \det\left(T_j^{j'}\right) \cdot t_{1'\ldots n'}$.

Substitutionsregel:

$$\int f(x)\, \mathrm{d}^n x = \int f\left(x(y)\right) \left|\det\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)\right| \mathrm{d}^n y$$

aus der Forderung, dass alle Volumina ≥ 0 sind. Falls negative Volumina gewünscht sind:

$\det\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)$ statt $\left|\det\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)\right|$.

Das motiviert die Schreibweise

$$\int_M \alpha := \int_M f(x)\, \mathrm{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^n := \int_M f(x)\, \mathrm{d}x^1 \ldots \mathrm{d}x^n$$

für $\alpha := f(x)\, \mathrm{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^n$.

Kurvenintegrale:

1-Form $\alpha := \alpha_j\, \mathrm{d}x^j$, Vektorfeld A

$$\int_k A \cdot \mathrm{d}x = \int_k \langle A, \dot{k} \rangle\, \mathrm{d}t =: \int_k \alpha_j \frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}\, \mathrm{d}t =: \int_k \alpha$$

Dabei ist α die 1-Form $X \to \langle A, X \rangle$

Beispiel: Mechanische Arbeit: Polarkoordinaten (r, φ), Kraft $K = a\, \mathrm{d}\varphi$. Weg k sei als $k(t) = \left(r(t), \varphi(t)\right)$ gegeben. Arbeit:

$$\int_k K = \int_k a\, \mathrm{d}\varphi = \int_{\text{Intervall der } t} a \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\, \mathrm{d}t.$$

In kartesischen Koordinaten dürfen Vektoren mit Kovektoren identifiziert werden. Zur Berechnung von A: Transformation in kartesische Koordinaten: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix};$$

Inverses:

$$\frac{\partial(r, \varphi)}{\partial(x, y)} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -1\frac{1}{r}\sin\varphi & \frac{1}{r}\cos\varphi \end{pmatrix};$$

Nach 8:

$$K = a\, \mathrm{d}\varphi = a\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathrm{d}y\right) = a\left(-\frac{1}{r}\sin\varphi\, \mathrm{d}x + \frac{1}{r}\cos\varphi\, \mathrm{d}y\right) = \frac{a}{r^2}(-y\, \mathrm{d}x + x\, \mathrm{d}y)$$

.

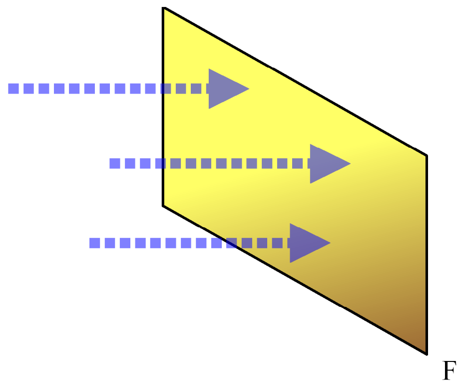
Dieser Kovektor darf mit A identifiziert werden $\Rightarrow$

$$\int_k A\, \mathrm{d}x = \int_k \langle A, \dot{k} \rangle\, \mathrm{d}t = \int_k \frac{a}{r^2} \left\langle (y, x), \left(\dot{k}^1(t), \dot{k}^2(t)\right) \right\rangle \mathrm{d}t$$

$$= \int_a \frac{a}{k^1(t)^2 + k^2(t)^2} \left(-k^2(t)\,\dot{k}^1(t) + k^1(t)\,\dot{k}^2(t)\right) \mathrm{d}t.$$

3. Flächenintegrale

Fluss von Teilchen $= \dfrac{\text{Zahl der Teilchen}}{\text{Fläche} \cdot \text{Zeit}}$



wenn $F \perp v$

Gesamtzahl der Teilchen durch F pro Zeiteinheit:
$\int_F \text{Fluss}\, \mathrm{d}\, x\, \mathrm{d}\, y$,

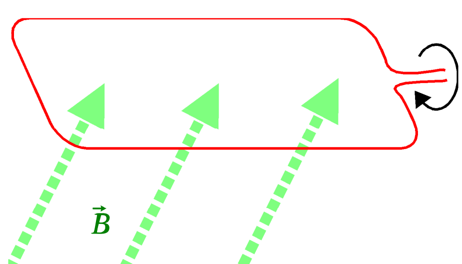
falls kartesische Koordinaten verwendet werden.

Falls v nicht $\perp F$:
$\text{Gesamtzahl} = \int_F \text{Fluss} \cos \alpha\, \mathrm{d}\, x\, \mathrm{d}\, y$

α : Winkel zwischen Fluss und Flächennormalen.

Sei n Normale auf Fläche in betrachteten Punkt und sei $\vec{N}$ Vektor in Richtung n und der Länge $|\vec{N}|$ = Fläche des Parallelogramms, das von $\Delta\, x = 1$ und $\Delta\, y = 1$ aufgespannt wird.

Teilchenzahl pro Zeiteinheit:
$\int_F \text{Fluss}\, \mathrm{d}\, \vec{F} := \int_F \langle \text{Fluss}\, ,\, \mathrm{d}\, \vec{N} \rangle\, \mathrm{d}\, x\, \mathrm{d}\, y$



Definition 17: Eine Abbildung
$f : \mathbb{R}^2 \supset D(f) \to \mathbb{R}^n\, , (u\, , v) \to f(u\, , v) = \left(x^1(u\, , v)\, , \dots\, , x^n(u\, , v)\right)$
heißt **Parameterdarstellung einer (2-dimensionalen) Fläche** im $\mathbb{R}^n$, wenn gilt:

1) $D(f)$ ist offen

2) f ist differenzierbar, und die partiellen Ableitungen
$$\frac{\partial x^i}{\partial u}, \frac{\partial x^i}{\partial v}$$
sind stetig

3)
$$\text{Rang } T_f \equiv \text{Rang}\begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial u} & \frac{\partial x^1}{\partial v} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial x^n}{\partial u} & \frac{\partial x^n}{\partial v} \end{pmatrix} = 2 \qquad \forall\,(u,v) \in D(f)$$
Die Punktmenge $\left\{ f(u,v) \in \mathbb{R}^n \middle| (u,v) \in D(f) \right\}$ heißt **Fläche**.

Beispiele zur äußeren Ableitung:

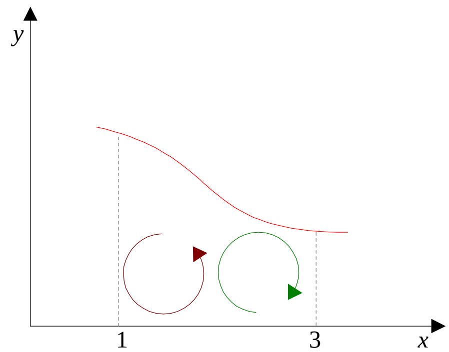
$$A = \left(A_1, A_2, A_3, A_4 = U\right) = A_i\, d\, x^i$$

$$\mathrm{d}\,A = \mathrm{d}\,A_i \wedge \mathrm{d}\,x^i = \left(\frac{\partial A_1}{\partial x^1}\,\mathrm{d}\,x^1 + \frac{\partial A_1}{\partial x^2}\,\mathrm{d}\,x^2 + \frac{\partial A_1}{\partial x^3}\,\mathrm{d}\,x^3 + \frac{\partial A_1}{\partial x^4}\,\mathrm{d}\,x^4\right) \wedge \mathrm{d}\,x^1 +$$
$$+\left(\frac{\partial A_2}{\partial x^1}\,\mathrm{d}\,x^1 + \frac{\partial A_2}{\partial x^2}\,\mathrm{d}\,x^2 + \frac{\partial A_2}{\partial x^3}\,\mathrm{d}\,x^3 + \frac{\partial A_2}{\partial x^4}\,\mathrm{d}\,x^4\right) \wedge \mathrm{d}\,x^2 + \ldots$$
$$= \left(\frac{\partial A_2}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^2}\right)\mathrm{d}\,x^1 \wedge \mathrm{d}\,x^2 + \left(\frac{\partial A_1}{\partial x^3} - \frac{\partial A_1}{\partial x^3}\right)\mathrm{d}\,x^1 \wedge \mathrm{d}\,x^3 = \ldots$$

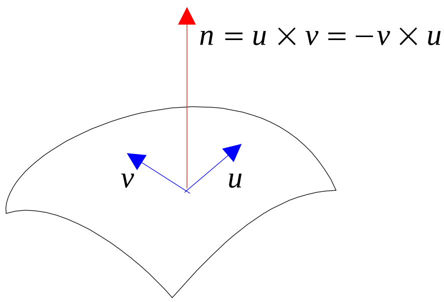
$$\mathrm{d}\left[x^1\,\mathrm{d}\,x^2 \wedge \mathrm{d}\,x^3 + \left(x^2\right)^5\mathrm{d}\,x^1 \wedge \mathrm{d}\,x^3 + \left(x^3\right)^2\mathrm{d}\,x^2 \wedge \mathrm{d}\,x^3\right]$$
$$\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\} = \left[\mathrm{d}\,x^1 \wedge \mathrm{d}\,x^2 \wedge \mathrm{d}\,x^3 + 5\left(x^2\right)^4\mathrm{d}\,x^2 \wedge \mathrm{d}\,x^1 \wedge \mathrm{d}\,x^3 + 2\,x^3\,\mathrm{d}\,x^3 \wedge \mathrm{d}\,x^2 \wedge \mathrm{d}\,x^3\right]$$
$$\left[\left(1 - 5\left(x^2\right)^4\right)\mathrm{d}\,x^1 \wedge \mathrm{d}\,x^2 \wedge \mathrm{d}\,x^3\right]\left\{\qquad\right\} =$$
$$= \left(1 - 5\left(x^2\right)^4\right)\frac{1}{6}\left(\mathrm{d}\,x^1 \otimes \mathrm{d}\,x^2 \otimes \mathrm{d}\,x^3 + \mathrm{d}\,x^2 \otimes \mathrm{d}\,x^3 \otimes \mathrm{d}\,x^1 + \mathrm{d}\,x^3 \otimes \mathrm{d}\,x^1 \otimes \mathrm{d}\,x^2 - \mathrm{d}\,x^2 \otimes \mathrm{d}\,x^1 \otimes\right.$$
$$\left. - \mathrm{d}\,x^1 \otimes \mathrm{d}\,x^3 \otimes \mathrm{d}\,x^2 - \mathrm{d}\,x^3 \otimes \mathrm{d}\,x^2 \otimes \mathrm{d}\,x^1\right)\left\{\qquad\right\} = \frac{1}{6}\left(1 - 5\left(x^2\right)^4\right)\left(0 + 0 + 0 - 1 - 1 - 0\right)$$

Das Minuszeichen:

$$\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_3^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$



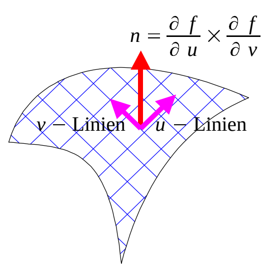
$$\int \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \rightarrow \int \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = -\int \mathrm{d}y \wedge d\,\mathrm{x}$$



***Bemerkung**:*

1) *Die Abbildung* $\tilde{f}_{v_a} : u \rightarrow f(u, v = \text{konst} = v_0)$ *definiert eine 1-dimensionale Punktmenge auf der Fläche, die sogenannte **Parameterlinie**, analog auch* $v \rightarrow f(u = u_0, v)$. *Die Tangenten an diese Parameterlinien sind auch Tangenten an die Fläche, sie sind durch die Vektoren*
$$\frac{\partial f(u, v_0)}{\partial u} \text{ und } \frac{\partial f(u_0, v)}{\partial v}$$
gegeben.

2) *Bedingung 3* $\Rightarrow$ *beide Tangentenvektoren sind linear unabhängig, d.h. sie spannen die **Tangentialebene** auf (im betrachteten Punkt* (u_0, v_0) *).*
Für Flächen im 3-dimensionalen Raum gilt:
$$n := \frac{\partial f}{\partial u} \times \frac{\partial f}{\partial v}$$
*ist der **Normalenvektor** auf F im Punkt* (u_0, v_0). $n \neq 0$ *wegen Bedingung 3.*



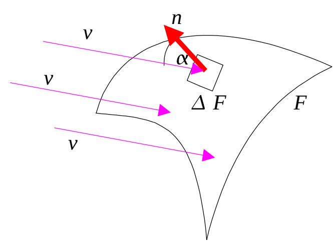
Definition 18: Eine Fläche im $\mathbb{R}^3$ heißt **orientierbar**, wenn in jedem $x \in F$ ein Normalenvektor n so definiert werden kann, dass n stetig von x abhängt.

Beispiele:

1) Sphäre S^2 : Es gibt zwei verschiedene Orientierungen: n nach außen und n nach innen.
2) Stücke einer Ebene: 2 verscheidene Orientierungen.
3) Möbiusband: nicht orientierbar.

Definition 19: Eine **stückweise glatte Fläche** ist eine stetige Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \supset D(f) \to \mathbb{R}^n$; $(u,v) \to f(u,v) := (x^1(u,v), \dots, x^n(u,v))$, die eine Vereinigung endlich vieler Flächen nach Definition 17 ist.

Beispiele: Würfeloberfläche, Tetraederoberfläche usw. sowie die Kugeloberfläche (vgl. Satz v. Igel).



A = Fluss der Teilchen = Teilchenzahl / (Fläche senkrecht durch v · Zeit) = $\rho \cdot v$; ρ = Dichte der Teilchen;
v = deren Geschwindigkeit
Zahl der Teilchen durch Fläche:

$$Z = \sum_{k=1}^{m} |A(x)| \cdot \cos\alpha \cdot \Delta F_k = \sum_{k=1}^{m} \langle A(x), \Delta \vec{F} \rangle$$

Grenzübergang $m \to \infty$: Sei B der Parameterbereich von (u, v) :

$$Z = \int_F \langle A(x), \mathrm{d}\vec{F} \rangle := \int_B \left\langle A(x), \frac{\partial f}{\partial u} \times \frac{\partial f}{\partial v} \right\rangle \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v,$$

denn

$$\frac{\partial f}{\partial u} \times \frac{\partial f}{\partial v}$$

ist der Normalenvektor auf F mit der Länge, die gleich der Fläche des Parallelogramms ist, das von

$$\frac{\partial f}{\partial u} \text{ und } \frac{\partial f}{\partial v}$$

aufgespannt ist. Hinreichende Voraussetzung für Existenz des Integrals: F messbar *und*

$$n = \frac{\partial f}{\partial u} \times \frac{\partial f}{\partial v}$$

stetig ($\rightarrow$ Satz I.17)

Definition 20: Sei F eine stückweise glatte Fläche des $\mathbb{R}^3$, dargestellt durch

$$f\colon B \ni (u, v) \rightarrow \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix} = f(u,v) \in F.$$

B sei messbar und **kompakt**, d.h. abgeschlossen und beschränkt, und F sei orientierbar durch $n = \frac{\partial f}{\partial u} \times \frac{\partial f}{\partial v}$.

Sei $A\colon \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein auf F stückweise stetiges Vektorfeld.

$$\int_F \langle A, \mathrm{d}\vec{F} \rangle \equiv \int_f a \cdot \mathrm{d}\vec{F} := \int_B \left\langle A(f(u,v)), \frac{\partial f}{\partial u} \times \frac{\partial f}{\partial v} \right\rangle \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

$$= \int_B \left\{ A^1 \left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u} \right) + A^2 \left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} \right) \right.$$

$$\left. + A^3 \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} \right) \right\} \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

Oberflächenintegral von A über F.

Bemerkung: *Oberflächenintegrale sind, abgesehen vom Vorzeichen, unabhängig von der Parameterdarstellung. Seien (u,v) und $(\tilde{u}, \tilde{v})$ Parameter von F. Dann hat die Jacobi-Matrix*

$$J := \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} \\ \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \end{pmatrix}$$

den Rang 2. Denn nach der Kettenregel gilt:

$$\operatorname{Rang} \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial x^1}{\partial \tilde{v}} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial x^n}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial x^n}{\partial \tilde{v}} \end{pmatrix} = 2 = \operatorname{Rang} \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial u} & \frac{\partial x^1}{\partial v} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial x^n}{\partial u} & \frac{\partial x^n}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} \\ \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \end{pmatrix}$$

Wäre Rang $J < Z$, wäre auch Rang der Produktmatrix < 2 (da die Bilder der Zeilen $\left(\frac{\partial x^i}{\partial}\ u\ \frac{\partial x^i}{\partial v} \right)$).

$$\int_F \langle A, d\,\vec{F} \rangle =$$

$$\int_B \left\{ A^1 \left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u} \right) + A^2 \left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} \right) + A^3 \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} \right) \right.$$

$$\left. = \int_B \left\{ A^1 \det \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + A^2 \det \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + A^3 \det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right\} \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \right.$$

„Substitutionsregel“: Beachte Vorzeichen!

$$= \int_{\tilde{B}} \left\{ A^1 \ldots \right\} \det \frac{\partial (u, v)}{\partial (\tilde{u}, \tilde{v})} \, d\tilde{u} \, d\tilde{v}$$

$$= \int_{\tilde{B}} \left\{ A^1 \det \left(\frac{\partial (y, z)}{\partial (u, v)} \frac{\partial (u, v)}{\partial (\tilde{u}, \tilde{v})} \right) + A^2 \det \left(\frac{\partial (z, x)}{\partial (u, v)} \frac{\partial (u, v)}{\partial (\tilde{u}, \tilde{v})} \right) \right.$$

$$\left. + A^3 \det \left(\frac{\partial (x, y)}{\partial (u, v)} \frac{\partial (u, v)}{\partial (\tilde{u}, \tilde{v})} \right) \right\} d\tilde{u} \, d\tilde{v}$$

$$= \int_{\tilde{B}} \left\{ A^1 \det \frac{\partial (y, z)}{\partial (\tilde{u}, \tilde{v})} + A^2 \det \frac{\partial (z, x)}{\partial (\tilde{u}, \tilde{v})} + A^3 \det \frac{\partial (x, y)}{\partial (\tilde{u}, \tilde{v})} \right\} d\tilde{u} \, d\tilde{v}$$

Beispiele: Sei D die dielektrische Verschiebung

$$Q = \int_F D \cdot d\vec{F}$$

Andere Deutung: Strom D einer Flüssigkeit durch F.
Betrachte Kugel: Radius R, F sei Kugeloberfläche.

...

Auf der Kugel: Sei $D: \; a \frac{x}{|x^3|}$ mit $x \in \mathbb{R}^3$; $a \in \mathbb{R}$

Setze $(u, v) := (\vartheta, \varphi)$

$$Q = \int_F D \cot \, d\vec{F} = a \int_0^{\pi} \int_0^{2} \pi \left\{ \frac{x^1}{R^3} \left(R \cos\vartheta \sin\varphi : 0 - R^2 \sin^2\vartheta \cos\varphi \right) \right.$$

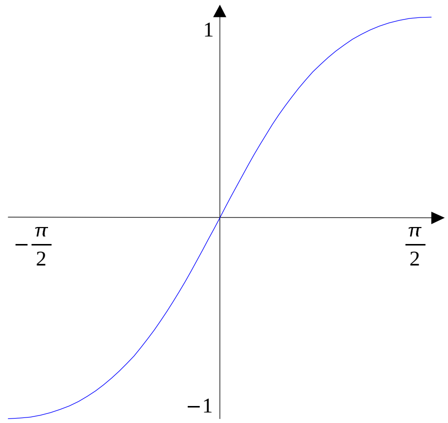
$$\left. + \frac{x^2}{R^3} \left(R^2 \sin^2\vartheta \sin\varphi - R^2 \cdot 0 \right) + \frac{x^3}{R^3} \left(R^2 \cos\vartheta \sin\vartheta \cos^2\varphi + R^2 \sin\vartheta \cos\vartheta \sin^2\varphi \right) \right\} d\vartheta \, d\varphi$$

$$\int g(u, v) \, n \, du \, dr \; ; \; g(u, r) := z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

$$\int_B g(x, y) \left| \frac{\partial f}{\partial x} \times \frac{\partial f}{\partial y} \right| dx \, dy = \int_B \sqrt{1 - x^2 - y^2} \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{-y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \end{pmatrix} \right| dx \, dy =$$

$$= \int_B \sqrt{1 - x^2 - y^2} \left| \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \\ 1 \end{pmatrix} \right| dx \, dx = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1 - x^2}}^{\sqrt{1 - x^2}} dy \, dx = \int_{-1}^{1} 2 \sqrt{1 - x^2} \, dx$$

$$= \left[x \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x \right]_{-1}^{1}$$



Beachte:
Flächeninhalt:
$$\int_B \left| \frac{\partial f}{\partial u} \times \frac{\partial f}{\partial v} \right| \mathrm{d}\, u\, \mathrm{d}\, v\,,$$
da die Länge von
$$\frac{\partial f}{\partial u} \times \frac{\partial f}{\partial v}$$
der Flächeninhalt des Parallelogramms ist, das von
$$\frac{\partial f}{\partial u} \text{ und } \frac{\partial f}{\partial v}$$
aufgespannt wird.

Definition 21 / Definition 20: $\int A \cdot \mathrm{d}\,\vec{F}$ ist Abkürzung für
$$\int_B \left\langle A\,,\, \frac{\partial f}{\partial u} \times \frac{\partial f}{\partial v} \right\rangle \mathrm{d}\, u\, \mathrm{d}\, v = \int_B \langle A\,,\, n \rangle\, \mathrm{d}\, u\, \mathrm{d}\, v$$
mit
$$n = \frac{\partial f}{\partial u} \times \frac{\partial f}{\partial v}$$
Definiere 2-Form
$$\omega := \langle A\,,\, n \rangle\, \mathrm{d}\, u \wedge \mathrm{d}\, v \Rightarrow \int_F A\, d\, \vec{F} = \int_B \omega$$

Dabei ist B der Parameterbereich von $(u\,,\,v)$ mit $F = \{ f\,(u\,,\,v) | (u\,,\,v) \in B \}$
$\mathrm{d}\, u$ und $\mathrm{d}\, v$ können auch Linearkombination der $\mathrm{d}\, x^i$ sein. Dann hat ω die Gestalt $\omega = \omega_{j\,k}\, \mathrm{d}\, x^j \wedge \mathrm{d}\, x^k$

1. Die Schreibweise $\int \omega$ hat den Vorteil, dass sie *auch* für 2-dimensionale Flächen im $\mathbb{R}^n$ mit $n > 3$ gilt.
2. Bisher: Fläche ist orientierbar, wenn es ein stetiges Normalenvektorfeld ($\neq 0$) gibt.
   Jetzt (auch für $\mathbb{R}^n$; $n > 3$): F heißt **orientierbar**, wenn es auf ihr eine stetige, nirgends verschwindende 2-Form gibt (Allgemeiner: p-dim. Fläche im $\mathbb{R}^n$; $n > p$ heißt orientierbar, wenn es auf F eine stetige, nirgends verschwindende p-Form gibt. (Dies ist äquivalent zur Definition 18, falls $p = 2$ und $n = 3$ ist.)

$$n \Leftrightarrow \left| \frac{\partial f}{\partial u} \times \frac{\partial f}{\partial v} \right| \mathrm{d}\, u \wedge \mathrm{d}\, v$$

Beispiel:
Kreis („string"), der sich entlang der z-Achse bewegt:
$x(u,v) = r \cos u,\ y(u,v) = r \sin u,\ z(u,v) = a \cdot t,\ t(u,v) = v$
Gesucht: Fläche, die dieser Kreis von $v = 0$ bis $v = T$ überstreicht.
Im $\mathbb{R}^3$ *wäre* die Fläche

$$\int \left| \frac{\partial f}{\partial u} \times \frac{\partial f}{\partial v} \right| \mathrm{d}\, u\, \mathrm{d}\, v$$

(Integral über die Fläche F, die von den Tangenten $\frac{\partial f}{\partial u}$ und $\frac{\partial f}{\partial v}$ aufgespannt wird).

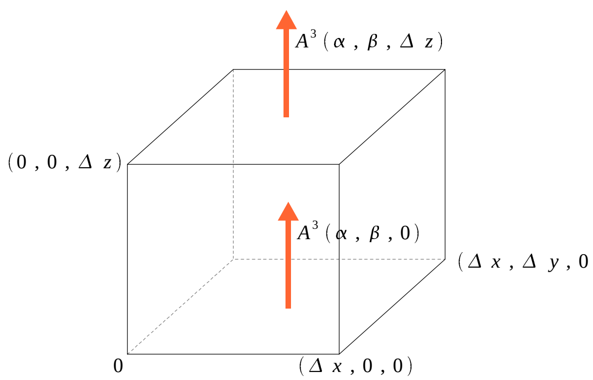
$$\frac{\partial f}{\partial u} = (-r \sin u, r \cos u, 0, 0)^T;\ \frac{\partial f}{\partial v} = (0, 0, a, 1)^T$$

(Annahme: Koordinaten im $\mathbb{R}^4$ orthonormiert)

$$F(u,v) = r\sqrt{1+a^2}$$

$$\int F(u,v)\, \mathrm{d}\, u \wedge \mathrm{d}\, v = \int_0^T \int_0^{2\pi} r\sqrt{1+a^2}\, \mathrm{d}\, u \wedge \mathrm{d}\, v$$

4. Der Satz von Gauß



Differenz von A^3 an den Stellen $(\alpha, \beta, \Delta z)$ und $(\alpha, \beta, 0)$: Differenz der aus- und einströmenden Flüssigkeit durch die obere und untere Fläche

$$\approx \frac{\partial A^3}{\partial z} \Delta z \cdot \text{Flächeninhalt} = \frac{\partial A^3}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z$$

(Vorsicht! Zu stark vereinfacht. Man müsste Mittelwerte nehmen, siehe unten)

Differenz zwischen aus- und einströmender Flüssigkeit durch alle 6 Flächen:

$$\frac{\partial A^1}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z + \frac{\partial A^2}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z + \frac{\partial A^3}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z = \operatorname{div} A \Delta V \qquad \text{mit}$$

$$\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z;\ \operatorname{div} A := \frac{\partial A^1}{\partial x} + \frac{\partial A^2}{\partial y} + \frac{\partial A^3}{\partial z}$$

Allgemein:

Definition 22: Sei A ein differenzierbares Vektorfeld im $\mathbb{R}^n$ mit den Komponenten $\left(A^1, \ldots, A^n\right)^T$ bezüglich einer **Orthonormalbasis** gegeben.

a) Dann ist die Divergenz von A definiert als

$$\operatorname{div} A := \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial A^k}{\partial x^k}$$

b) Ist A speziell ein differenzierbares Vektorfeld im $\mathbb{R}^3$, so definiert man seine **Rotation** $\operatorname{rot} A$ als den „Vektor", der in einer *positiv orientierten Orthonormalbasis* die Komponenten

$$\left(\frac{\partial A^3}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^3}, \frac{\partial A^1}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^1}, \frac{\partial A^2}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^2}\right)$$

besitzt.
(Beachte: Bei Koordinatentransformation mit negativer Transformationsdeterminante die Komponenten von $\operatorname{rot} A$ unverändert bleiben: „**Pseudovektor**").

c) Der **Gradient** $\operatorname{grad} f$ einer Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist das Vektorfeld, das für beliebige Vektoren $V \in \mathbb{R}^n$ die Gleichung $\langle \operatorname{grad} f, V\rangle = \mathrm{d} f(V)$ erfüllt.
($\mathrm{d} f(V)$ ist die Wirkung der 1-Form $\mathrm{d} f$ auf V.)

Beispiel:
Seien in kartesischen Koordinaten: $f := x^2 + y^2 + 2y$ und $A = (x, y) \Rightarrow \operatorname{grad} f = (2x, 2y+2)^T$; $\operatorname{div} A = 2$.
In Polarkoordinaten: $x = r\cos\varphi$; $y = r\sin\varphi$;

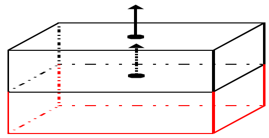
$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix};$$

$$\frac{\partial(r, \varphi)}{\partial(x, y)} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \frac{-1}{r}\sin\varphi & \frac{1}{r}\cos\varphi \end{pmatrix};$$

Rechne gedankenlos den Gradienten + Divergenz mit diesen Formeln aus:
$f = r^2 + 2r\sin\varphi \Rightarrow \operatorname{grad} f \neq (2r, 2x)$
$\operatorname{div} A \neq (\cos\varphi + r\cos\varphi)$

$$(\operatorname{grad} f)_{\text{Polarkoordinaten}} = \left(\frac{\partial(r, \varphi)}{\partial(x, y)}\right)\begin{pmatrix} 2x \\ 2y+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\frac{1}{r}\sin\varphi & \frac{1}{r}\cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2r\cos\varphi \\ 2r\sin\varphi + 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2r + 2\sin\varphi \\ \frac{2}{2}\cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2r + 2\frac{y}{r} \\ 2\frac{x}{r} \end{pmatrix}$$



Satz 23 (Satz von Gauß): Seien $M \subset \mathbb{R}^3$ messbar und $f:(u,v) \to f(u,v) \in F \subset \mathbb{R}^3$ die Parameterdarstellung (siehe Definition 17) seiner Oberfläche F, wobei f stückweise glatt ist und

$$n = \frac{\partial f}{\partial u} \times \frac{\partial f}{\partial v}$$

von M weg nach außen gerichtet ist. Das Vektorfeld A sei stetig differenzierbar. Dann gilt:

$$\int_F A \cdot \mathrm{d}\vec{F} = \int_M \operatorname{div} A \, \mathrm{d}^3 x$$

Beispiel:

1) Die dielektrische Verschiebung D, Ladungsdichte ϱ: $\operatorname{div} D = \varrho$. Integration über (messbares) M:

$$\int_M \operatorname{div} D \, \mathrm{d} x = \int_M \varrho \, \mathrm{d} x = Q$$

$$Q = \int_M \operatorname{div} D \, \mathrm{d} x = \int_F D \cdot \mathrm{d} \vec{F}$$

2) Maxwellgleichung $\Rightarrow \operatorname{div} H = 0$, d.h.:

$$\int_M \operatorname{div} H \, \mathrm{d} x = \int_F H \cdot \mathrm{d} \vec{F} = 0$$

(Magnetfeld hat keine Quellen = Monopole)

3) Kontinuitätsgleichung:

$$\operatorname{div} \vec{j} = -\frac{\partial \varrho}{\partial t}$$

$\vec{j}$: Stromdichte $\left[\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}^2}\right]$

ϱ : Ladungsdichte $\left[\frac{\mathrm{A\ s}}{\mathrm{m}^3}\right]$

$$\int_M \operatorname{div} \vec{j} \, \mathrm{d} x = \int_F \vec{j} \cdot \mathrm{d} \vec{F} = -\int \dot{\varrho} \, \mathrm{d} t = -\dot{Q}$$

4) In der Relativitätstheorie definiert man $\vec{j}$ als Vektor im $\mathbb{R}^4$ (nichteuklidisch!) mit den Komponenten

$(\vec{j}, \varrho) \equiv (j^1, j^2, j^3, \varrho)$

Koordinaten seien $(x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z, x^4 = t)$

$$\operatorname{div}_4 J = \frac{\partial J^i}{\partial x^i} = \operatorname{div}_3 \vec{j} + \frac{\partial \varrho}{\partial t}$$

5) Flüssigkeit ohne Quellen: $\vec{j}$ entspricht Strom; ϱ : Dichte $\Rightarrow$ $\operatorname{div}_4 J = 0$:

Kontinuitätsgleichung

Rechenbeispiele:

1) Berechne

$$\int_F \mathrm{d}\,\vec{F} \qquad (x \in \mathbb{R}^3)$$

$$\int_F x \;\mathrm{d}\,\vec{F} = \int_M \mathrm{div}\; x \;\mathrm{d}\; x = 3 \int_M \mathrm{d}\; x = 3\;\mu\,(M)\,;$$

$$\mathrm{div}\;\; x = \frac{\partial\, x^1}{\partial\, x^1} + \ldots + \frac{\partial\, x^3}{\partial\, x^3} = 3$$

2) $\int_F \mathrm{rot}\;\; A \;\mathrm{d}\;\vec{F} = \int_M \mathrm{div}\;\;\mathrm{rot}\;\; A \;\mathrm{d}\;\; x = 0$,

da für beliebige Vektorfelder gilt:

$$\mathrm{div}\;\;\mathrm{rot}\;\; A = \mathrm{div}\,(A^3_{,\,2} - A^2_{,\,3}\,,\; A^1_{,\,3} - A^3_{,\,1}\,,\; A^3_{,\,1} - A^1_{,\,3})$$

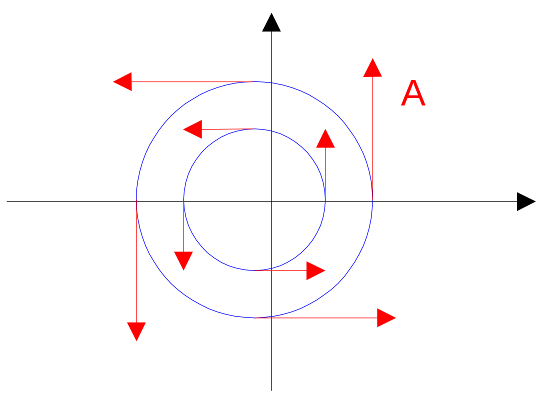
Merke: *Für* C^2*-Vektorfelder* A *gilt:* $\mathrm{div}\;\mathrm{rot}\;\; A = 0$. *Für* C^2*-Funktionen* u *gilt:* $\mathrm{rot}\;\;\mathrm{grad}\;\; u = 0$.

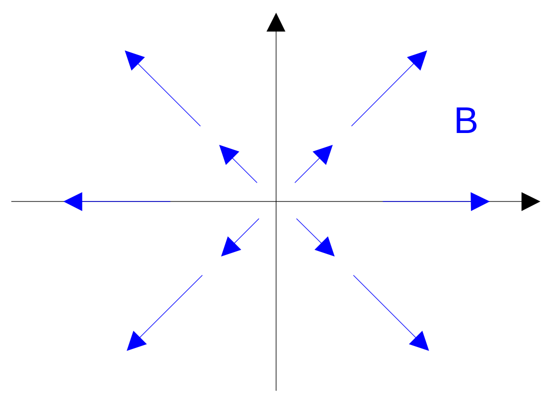
5. Der Satz von Stokes

Beispiele für einfache Vektorfelder im $\mathbb{R}^2$:

a) Ein Vektorfeld A mit $\mathrm{rot}\;\; A = 2 \neq 0$ und $\mathrm{div}\;\; A = 0$: $A = (-y\,,\; x)$

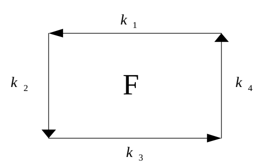
b) Ein Vektorfeld B mit $\mathrm{div}\;\; B = 2 \neq 0$ und $\mathrm{rot}\;\; B = 0$: $B = (x\,,\;\; y)$





$\mathrm{rot}\;\; A$ beschreibt die Zirkulation von A .

Beispiel: im $\mathbb{R}^2$: F sei ein Rechteck parallel zu den Koordinatenlinien mit den Kantenlängen $\Delta\; x\,,\, \Delta\;\; y$. k sei die Randkurve von F (im mathematisch positiven Sinn orientiert):



$A=(A^1, A^2)$ sei ein Vektorfeld.

$$\text{Zirkulation}=\sum_{i=1}^{4}\int_{k_i} A\,\mathrm{d}\,x=\int_k A\,\mathrm{d}\,x$$

$$\int_0^{\Delta x} A^1(x_0+\tilde{x}, y_0)\,\mathrm{d}\,\tilde{x}+\int_0^{\Delta y} A^2(x_0+\Delta x, y_0+\tilde{y})\,\mathrm{d}\,\tilde{y}$$

$$+\int_{\Delta x}^{0} A^1(x_0\,\tilde{x}, y_0+\Delta y)\,\mathrm{d}\,\tilde{x}+\int_{\Delta y}^{0} A^2(x_0, y_0+\tilde{y})\,\mathrm{d}\,\tilde{y}\underset{\text{MWS der Integralrechnung}}{=}$$

$$=\left[A^1(x_0+\xi, y_0)-A^1(x_0+\xi', y_0+\Delta y)\right]\Delta x+\left[A^2(x_0+\Delta x, y_0+\tilde{\xi})-A^2(x_0, y_0+\tilde{\xi}')\right]\Delta y$$

Limes $\Delta x, \Delta y\to 0$; $0\le\xi, \xi'\le\Delta x, 0\le\tilde{\xi}, \tilde{\xi}'\le\Delta y$

Stetigkeit von $A \Rightarrow -A^i(x_0, y_0)$.

Falls A differenzierbar ist:

$$A^1(x_0+\xi, y_0)-A^1(x_0+\xi', y_0+\Delta y)\underset{\Delta x\to 0}{\rightarrow} A^1(x_0, y_0)-A^1(x_0, y_0+\Delta y)$$

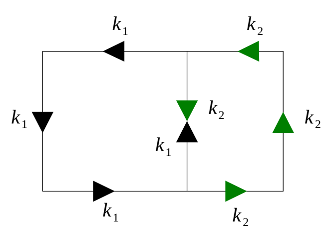
$$\underset{\Delta y\to 0}{\rightarrow}-\frac{\partial A^1(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y$$

Dabei wurden Terme 2. Ordnung in $\Delta x, \Delta y$ vernachlässigt, die von ξ, ξ' stammen

$$Z=\left(-\frac{\partial A^1}{\partial y}\Delta y\right)\Delta x+\left(-\frac{\partial A^2}{\partial x}\Delta x\right)\Delta y=(\mathrm{rot}\,A)_3\,\Delta x\,\Delta y=\mathrm{rot}\,A\,\mathrm{d}\,\vec{F}.$$

Sei jetzt F eine beliebige Fläche im $\mathbb{R}^3$ (messbar!!). Bilde Zerlegung von F in achsenparallele Rechtecke nach (I.6).

Beachte:



An aneinanderstoßenden Randlinien heben sich die Beiträge zu den Kurvenintegralen weg, da sie entgegengesetzt durchlaufen werden.

$$\Rightarrow\int_{\text{Randkurve von F}} A\,\mathrm{d}\,\vec{x}=\sum_{\text{Rechtecke}}\int_{k_i} A\,\mathrm{d}\,\vec{x}$$

Hier heben sich alle „inneren" Linienintegrale auf. Es bleiben die Integrale über die „äußeren" Randlinien (1x durchlaufene Linien), die sich für $i\to\infty$ der Randkurve von F nähern. $\Rightarrow$

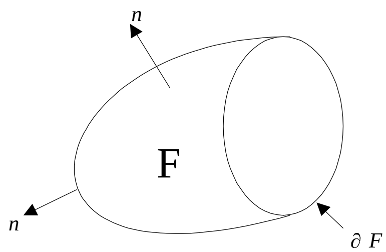
$$\int_{\text{Randkurve von }F}\mathrm{d}\,\vec{x}=\int_F \mathrm{rot}\,A\,\mathrm{d}\,\vec{F}$$

Satz 24 (Satz von Stokes): $F\subset\mathbb{R}^3$ sei eine stückweise glatte Fläche mit der Parameterdarstellung $f:(u, v)\to f(u, v)$. Der Definitionsbereich von f sei kompakt, und f sei zweimal stetig differenzierbar. F sei durch

$$n := \frac{\partial f}{\partial u} \times \frac{\partial f}{\partial v}$$

orientierbar. Der Rand ∂F von F sei eine Kurve k, die im Uhrzeigersinn durchlaufen wird, wenn man in Richtung n blickt (Korkenzieherregel).
Dann gilt für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$:

$$\int_{\partial F} A \, \mathrm{d}\, x = \int_F \operatorname{rot} A \, \mathrm{d}\, \vec{F} \, .$$



Beweis: Wir zeigen:

$$\left\langle \operatorname{rot} A , \frac{\partial f}{\partial u} \times \frac{\partial f}{\partial v} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial A(x(u,v))}{\partial u} , \frac{\partial f}{\partial v} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial A}{\partial v} , \frac{\partial f}{\partial u} \right\rangle$$

$$\left\langle \operatorname{rot} A , \frac{\partial f}{\partial u} \times \frac{\partial f}{\partial v} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial A}{\partial u} , \frac{\partial f}{\partial v} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial A}{\partial v} , \frac{\partial f}{\partial u} \right\rangle \quad (**)$$

$$A = A(\vec{x}) , \; f(u,v) = \vec{x} \in F$$

Sei

$$\frac{\partial A^1}{\partial u} =: A^{-1}_{,u}$$

usw., sei

$$f(u,v) = \vec{x} = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}$$

linke Seite von (**):

$$\left\langle \begin{pmatrix} A^3_{,y} - A^2_{,z} \\ A^1_{,z} - A^3_{,x} \\ A^2_{,x} - A^1_{,y} \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} y_{,u} z_{,v} - y_{,v} z_{,u} \\ z_{,u} x_{,v} - z_{,v} x_{,u} \\ x_{,u} y_{,v} - x_{,v} y_{,u} \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= \left(A^3_{,y} - A^2_{,z} \right) \left(y_{,u} z_{,v} - y_{,v} z_{,u} \right) + \left(A^1_{,z} - A^3_{,x} \right) \left(z_{,u} x_{,v} - z_{,v} x_{,u} \right) + \left(A^2_{,x} - A^1_{,y} \right) \left(x_{,u} y_{,v} - x \right.$$

rechte Seite: Kettenregel!

$$(A^1_{,x} x_{,u} + A^1_{,y} y_{,u} + A^1_{,z} z_{,u}) \cdot x_{,v} + (A^2_{,x} x_{,u} + A^2_{,y} y_{,u} + A^2_{,z} z_{,u}) \cdot y_{,v}$$
$$+ (A^3_{,x} x_{,u} + A^3_{,y} y_{,u} + A^3_{,z} z_{,u}) \cdot z_{,v} - (A^1_{,x} x_{,v} + A^1_{,y} y_{,v} + A^1_{,z} z_{,v}) \cdot x_{,u}$$
$$- (A^2_{,x} x_{,v} + A^2_{,y} y_{,v} + A^2_{,z} z_{,v}) \cdot y_{,u} - (A^3_{,x} x_{,v} + A^3_{,y} y_{,v} + A^3_{,z} z_{,v}) \cdot z_{,u}$$

$\Rightarrow$

$$\int_F \operatorname{rot} A \, \mathrm{d}\, \vec{F} = \int_B \langle \operatorname{rot} A , f_{,u} \times f_{,v} \rangle \, \mathrm{d}\, u \, \mathrm{d}\, v = \int_B \left(\langle A_{,u} , f_{,v} \rangle - \langle A_{,v} , f_{,u} \rangle \right) \mathrm{d}\, u \, \mathrm{d}\, v$$

$$= \int_B \left(\frac{\partial}{\partial u} \left\langle A , f_{,u} \right\rangle - \frac{\partial}{\partial v} \left\langle A , f_{,u} \right\rangle \right) \mathrm{d}\, u\, \mathrm{d}\, v = \int_B (\text{rot } A)^3 \, \mathrm{d}\, u\, \mathrm{d}\, v = \int_B \text{rot } a \, \mathrm{d}\, \tilde{F} = \int_{\partial B} a \, \mathrm{d}\, x \, .$$

Sei

$$a := \begin{pmatrix} \left\langle A , f_{,u} \right\rangle \\ \left\langle A , f_{,v} \right\rangle \end{pmatrix} , \; \tilde{a} = \begin{pmatrix} \left\langle A , f_{,u} \right\rangle \\ \left\langle A , f_{,v} \right\rangle \\ 0 \end{pmatrix} , \; \tilde{F} \subset \mathbb{R}^2 \text{ , d.h. } \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \tilde{F} \, ;$$

(*) vor Satz 24: Satz von Stokes gilt für ebene Flächen $\tilde{F} \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow$
$\int_{\partial B} a \, \mathrm{d}\, x$.

Das ist das gesuchte Kurvenintegral: Ist

$$t \in [a , b] \to \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$$

eine Parameterdarstellung der Kurve ∂B , so gilt:

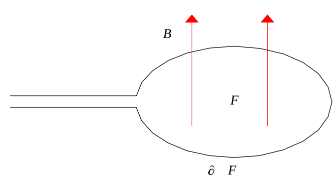
$$\int_{\partial B} a \, \mathrm{d}\, x = \int_a^b \left\langle a , \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} \right\rangle \mathrm{d}\, t = \int_a^b \left(\left\langle A , f_{,u} \frac{\mathrm{d}\, u}{\mathrm{d}\, t} \right\rangle + \left\langle A , f_v \frac{\mathrm{d}\, v}{\mathrm{d}\, t} \right\rangle \right) \mathrm{d}\, t = \int_a^b \left\langle A , \frac{\mathrm{d}\, f}{\mathrm{d}\, t} \right\rangle \mathrm{d}\, t =$$

.

Beispiele:

1) Maxwellgleichung: rot $E = -\dot{B}$. Integral über die Fläche F

$$\int_F \text{rot } F \cdot \mathrm{d}\, \vec{F} = \int_{\partial F} E \cdot \mathrm{d}\, x = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, t} \underbrace{\int_F B \cdot \mathrm{d}\, \vec{F}}_{\phi}$$



2) Seien F das Halb-Ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ mit } x \le 0$$

und A das Vektorfeld mit den Komponenten

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ y \end{pmatrix} .$$

Berechne

$$\int_F \text{rot } A \cdot \mathrm{d}\, \vec{F} \, .$$

Sei f die Abbildung $[-b , b] \times [-c , c] \to F \subset \mathbb{R}^3$

$$(y,z) \to \begin{pmatrix} -a\left(\frac{1-y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$\frac{\partial f}{\partial y}$ und $\frac{\partial f}{\partial z}$ besitzen in jeweils 2 Punkten mit $x=0$ eine Nullstelle

Die Orientierbarkeit ist gegeben

$$\frac{\partial f}{\partial y} \times \frac{\partial f}{\partial z} = \begin{pmatrix} \frac{a\ y/b^2}{\sqrt{1-y^2/b^2-z^2/c^2}} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{a\ z/c^2}{\sqrt{1-y^2/b^2-z^2/c^2}} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-a\ y/b^2}{\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}} \\ \frac{-a\ \frac{z}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ y \end{pmatrix}, \text{ rot } A = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{d}\,\vec{F} = \frac{\partial f}{\partial y} \times \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z$$

$$\text{rot } A \cdot \mathrm{d}\,\vec{F} = 2\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z$$

$$\int_F \text{rot } A \cdot \mathrm{d}\,\vec{F} = 1 \int_{-b}^{b} \int_{-c\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}}^{+c\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}} \mathrm{d}\,z\,\mathrm{d}\,y = 2\,c \int_{-b}^{b} 2\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}\,\mathrm{d}\,y$$

$$\overset{u:=\frac{y}{b}}{=} 4\,b\,c \cdot \frac{1}{2}\left(u\sqrt{1-u^2} + \arcsin\right) = 2\,b\,c\,\pi$$

Satz von Stokes: Sei k die Randkurve von F, d.h. die Kurve auf F mit $x=0$: Gleichung

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Elliptische Koordinaten:

$$\left.\begin{array}{l} y = b\cos\varphi \\ z = c\sin\varphi \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{b^2\cos^2\varphi}{b^2} + \frac{c^2\sin^2\varphi}{c^2} \equiv 1$$

$$k(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 \\ b\cos\varphi \\ c\sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$\frac{\mathrm{d}\,k(\varphi)}{\mathrm{d}\,\varphi} = \begin{pmatrix} 0 \\ -b\sin\varphi \\ b\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -c \sin \varphi \\ b \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$b\ c\,(\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi + \cos^2 \varphi) = b \cdot c \cdot \int_0^{2\pi} A \frac{\mathrm{d}\ k}{\mathrm{d}\ \varphi}\ \mathrm{d}\ \varphi = 2\ b\ c\ \pi$$

3) Seien die Voraussetzungen des Satzes von Stokes erfüllt. Eine Fläche F, die die abgeschlossene Kurve k als Rand besitzt, liege ganz im Definitionsbereich von A.
$\operatorname{rot}\ A = 0 \Rightarrow \int_k A \cdot \mathrm{d}\ x = 0$.

Ebenso:
$\int_F \operatorname{rot}\ A\ \mathrm{d}\ x = 0$
folgt: wenn F eine geschlossene Fläche (ohne Rand) ist.

4) Seien A ein stetiges Kraftfeld mit einem Potenzial und k ein geschlossener Weg (d.h. $k\,(a) = k\,(b)$. Satz 5: Wegunabhängigkeit des Integrals
$\Rightarrow \int_k A \cdot \mathrm{d}\ x = \int_F \operatorname{rot}\ A \cdot \mathrm{d}\ \vec{F} = 0$,
wo F irgendeine Fläche mit $k = \partial\ F$ ist.

2.5.5 Beliebige Dimensionen

Sei A ein Vekorfeld, das in **kartesischen Koordinaten** die Komponenten $(A^1, A^2, A^3)^T$ besitzt. Dann kann das Kurvenintegral $\int A \cdot \mathrm{d}\ x$ in der Form $\int \omega$ mit

$$\omega = \sum_{j=1}^{3} A^j\ \mathrm{d}\ x^j \underset{\text{kart. Koord.}}{\equiv} A_j\ \mathrm{d}\ x^j$$

geschrieben werden. (Dabei ist $\left(\mathrm{d}\ x^j\right)_{j=1}^{3}$ die Dualbasis zu $\left(e_j\right)_{j=1}^{3}$, die durch die kartesischen Koordinaten definiert wird.)

(1) $\mathrm{d}\ \omega = \sum_{j,k} A_{j,k}\ \mathrm{d}\ x^k \wedge \mathrm{d}\ x^j$. Dieser 2-Form wird der „Pseudovektor“ $\operatorname{rot}\ A = \varepsilon^{k\ j\ l}\ A_{j,k}\ e_l$ mit dem **Levi-Civita-Symbol** ε mit den Komponenten

$$\varepsilon^{k\ j\ l} = \begin{cases} 1, \text{ falls k j l eine gerade Permutation von 1,2,3 ist} \\ -1, \text{ falls k j l eine ungerade Permutation von 1,2,3 ist} \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

zugeordnet.

In (1) steht $\operatorname{rot}\ A$ senkrecht auf der Fläche F, wenn $\mathrm{d}\ \omega$ über F integriert wird: Wähle z.B. in einem Punkt von F e_1, e_2 tangential $\Rightarrow e_l = e_r$ ist die Normale. Dieses Konstrukt ist in jedem Punkt von F möglich:

$$A^i\ e_i \leftrightarrow A^i\ \mathrm{d}\ x^i \equiv A_i\ \mathrm{d}\ x^i = \omega$$
$$\mathrm{d}\ \omega = A_{i,k}\ \mathrm{d}\ x^k \wedge \mathrm{d}\ x^i \leftrightarrow \varepsilon^{k\ i\ l}\ A_{i,k}\ e_l$$

Statt
$$\int_{\partial F} A\ \mathrm{d}\ x = \int_F \left\langle \operatorname{rot}\ A, \mathrm{d}\ \vec{F} \right\rangle$$
schreibe:

$$\int_{\partial F} \omega = \int_F \mathrm{d}\,\omega \quad (2)$$

In kartesischen Koordinaten bewiesen.
Da unter den Integralen nur Differenzialformen vorkommen, ist diese (2) unabhängig vom Koordinatensystem.

Sei jetzt $\alpha := \alpha_{j\,k}\,\mathrm{d}\,x^j \wedge \mathrm{d}\,x^k$ 2-Form im $\mathbb{R}^3$. Ordne ihr den „Vektor“
$B := \varepsilon^{j\,k\,l}\,\omega_{j\,k}\,e_l$ (3)

$$\mathrm{d}\,x = \mathrm{d}\,\alpha_{j\,k\,,\,l}\,\mathrm{d}\,x^l \wedge \mathrm{d}\,x^j \wedge \mathrm{d}\,x^k = \frac{1}{6}\left(\alpha_{2\,3\,,\,1}\,\mathrm{d}\,x^1 \otimes \mathrm{d}\,x^2 \otimes \mathrm{d}\,x^3 - \alpha_{3\,2\,,\,1}\,\mathrm{d}\,x^1 \otimes \mathrm{d}\,x^3 \otimes \mathrm{d}\,x^2 + \ldots\right)$$
$$= \left(\alpha_{2\,3\,,\,1} + \alpha_{3\,2\,,\,1} + \alpha_{3\,1\,,\,2} + \alpha_{1\,3\,,\,2} + \alpha_{1\,2\,,\,3} + \alpha_{3\,1\,,\,2}\right)\mathrm{d}\,x^1 \wedge \mathrm{d}\,x^2 \wedge \mathrm{d}\,x^3 = \mathrm{div}\;B\;\mathrm{d}\,x^1 \wedge \mathrm{d}\,x^2 \wedge \mathrm{d}$$

Gauß:
$$\int_{\partial V} B \cdot \mathrm{d}\,\vec{F} = \int_V \mathrm{div}\;B\;\mathrm{d}^3\,x$$
schreibt man als

$$\int_{\partial V} \alpha = \int_V \mathrm{d}\,\alpha \quad (4)$$

(2): gilt für 1-Formen ω, (4) für 2-Formen α
(4): gilt für beliebige ($m-1$)-Formen β, wenn M eine m-dimensionale orientierbare „Fläche“ im $\mathbb{R}^n$ mit einer stetig differenzierbaren Parameterdarstellung ist und β stetig differenzierbar ist:

$$\int_{\partial M} \beta = \int_M \mathrm{d}\,\beta$$

6. Integrabilitätsbedingungen

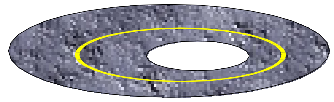
$\tilde{E} = \mathrm{grad}\;u$ DGL

Definition: $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt **einfach zusammenhängend**, falls sich jede geschlossene Kurve $k \subset M$ auf einen Punkt zusammenziehen lässt, ohne M zu verlassen.

Beispiel:

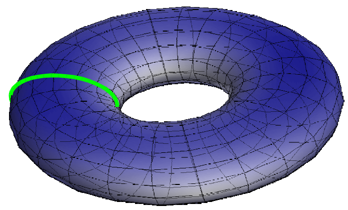
– Kreisscheibe: einfach zusammenhängend

– Kreisring oder allgemein „Flächenstück mit Loch“:



Lässt sich nicht zusammenziehen, ohne über das Loch zu kommen.

– Torus: *nicht* einfach zusammenhängend



sowohl Ring entlang des großen Radius als auch Ring entlang des kleinen Radius lässt sich nicht zusammenziehen

Satz 27: Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ einfach zusammenhängend und offen, und sei $A: M \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld.
Das Integral
$$\int_k A \, \mathrm{d} x$$
ist genau dann für jede in M verlaufende Kurve k wegunabhängig, wenn für alle $x \in M$ gilt: $\operatorname{rot} A(x) = 0$.

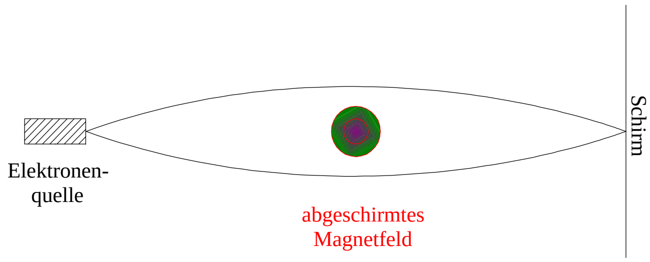
Beweis:

1.) Ist das Kurvenintegral wegunabhängig, so existiert nach Satz 5 ein Potenzial u mit $A = \operatorname{grad} u$. Aus $\operatorname{rot} A = \operatorname{rot} \operatorname{grad} u = 0$ (s. Rechenbeispiel zum Satz von Gauß) folgt die Behauptung.

2.) Sei $\operatorname{rot} A = 0$. Eine beliebige geschlossene Kurve $k \subset M$ lässt sich wegen des einfachen Zusammenhangs von M als Rand einer Fläche $F \subset M$ auffassen. Daher gilt mit Stokes:
$$\int_k A \, \mathrm{d} x = \int_F \operatorname{rot} A \cdot \mathrm{d} \vec{F} = 0$$
d.h. jedes Kurvenintegral von A ist wegunabhängig.

Beispiel: $M \subset \mathbb{R}^2$: „Punktierte Ebene“: $M = \mathbb{R}^2 - \{0\}$. Für
$$A(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$
gilt: $\operatorname{rot} A = 0$, aber für den Kreis k mit Radius 1 um Null:
$$k: t \to \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \; A = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$
$$\int_k A \, \mathrm{d} x = \int_0^{2\pi} \left(-\sin t \frac{\mathrm{d} x}{\mathrm{d} t} + \cos t \frac{\mathrm{d} y}{\mathrm{d} t} \right) \mathrm{d} t = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) \, \mathrm{d} t = 2\pi \neq 0$$

Aharonow-Bohm-Experiment:



$$\int_k A \,\mathrm{d}\, x \neq 0 = \int_F \operatorname{rot}\, A \cdot \mathrm{d}\, \vec{F} = \int_F \underbrace{B}_{=0} \cdot \mathrm{d}\, \vec{F}$$

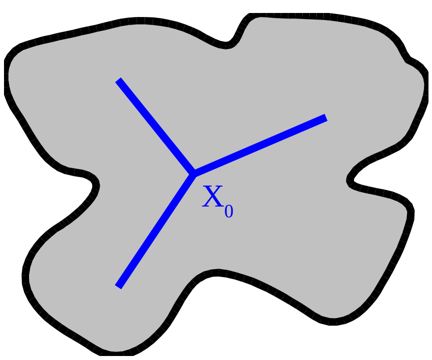
da $k \neq \partial\, F$ für eine ganz in M liegende Fläche F.

Satz 5, 27 $\Rightarrow$

Satz 28: Das Vektorfeld $A : M \to \mathbb{R}^3$ sei stetig differenzierbar auf der offenen, einfach zusammenhängenden Menge $M \subset \mathbb{R}^3$. Ein Potenzial u von A, d.h. eine Funktion $u : M \to \mathbb{R}$ mit $A = \operatorname{grad}\, u$, existiert genau dann, wenn $\operatorname{rot}\, A = 0$ gilt.

Beispiel: 2. Maxwellgleichung: $\operatorname{rot}\, E = -\dot{B}$: Potenzial existiert $\Leftrightarrow$ B ist zeitlich konstant.

Satz 29 (Lemma von Poincaré): Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine **sternförmige Menge**, d.h. es existiert ein Punkt $x_0 \in M$, so dass die Verbindungsstrecken zwischen x_0 und jedem anderen Punkt $y \in M$ ganz in M liegt. M sei außerdem offen. Dann gilt für jede stetig differenzierbare p-Form α mit $\omega = \mathrm{d}\, \alpha$.



Beispiele:

1.) $M \subset \mathbb{R}^3$, ω ist eine 1-Form. Wie in 25(1) ordnen wir ω ein Vektorfeld A zu. In 25: $\mathrm{d}\, \omega = 0 \Leftrightarrow \operatorname{rot}\, A = 0$. Lemma von Poincaré: $\operatorname{rot}\, A = 0 \Rightarrow$ es existiert eine Funktion α mit

$\omega = \mathrm{d}\,\alpha$. Wie in 25 kann A mit $\operatorname{grad}\alpha$ identifiziert werden. Hier ist das Poincaré-Lemma gleich Satz 28.

2.) $M \subset \mathbb{R}^3$, ω sei 2-Form. Wie in 25 ordnet man ω den Vektor

$B = \varepsilon^{j\,k\,l}\,\omega_{j\,k}\,e_l$

und $\mathrm{d}\,\omega$ die Funktion $\operatorname{div} B$ zu. 29 $\Rightarrow$ Es existiert eine 1-Form α mit $\omega = \mathrm{d}\,\alpha$. Ordne α das Vektorfeld A und $\mathrm{d}\,\alpha$ das Vektorfeld $\operatorname{rot}\alpha$ zu. Poincaré-Lemma bedeutet hier: $\operatorname{div} B = 0 \Rightarrow$ es existiert ein Vektorfeld A und $B = \operatorname{rot} A$.

Anwendung: Maxwellgleichung: $\operatorname{div} H = 0 \Rightarrow$ es existiert Vektorpotenzial A mit $H = \operatorname{rot} A$.

***Bemerkung**: „sternförmig“* $\underset{\text{nicht}\ \Leftarrow}{\Rightarrow}$ *einfach zusammenhängend.*

$$\int \operatorname{rot} E\,\mathrm{d}F = -\int \dot{B}\,\mathrm{d}F = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\Phi\,.$$

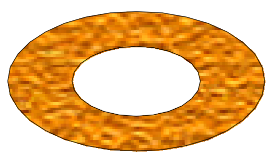
Satz 30: Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ messbar und kompakt, $Y \subset \mathbb{R}^m$ sei kompakt. Die Funktion $f: M \times Y \to \mathbb{R}$ besitze stetige partielle Ableitungen

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y^m}.$$

Dann gilt für alle $i = 1, \dots, m$:

$$\frac{\partial}{\partial y^i}\int_M f(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{\partial}{\partial y^i}} f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

Beweis: mit Hilfe des Mittelwertsatzes.



III. Gewöhnliche Differenzialgleichungen

1. Bezeichnungen

Gegeben: Funktion $f: \mathbb{R}^{k+2} \to \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}^{k+2} \to \mathbb{C}$.

Definition: Die Gleichung

(1) $f(x, y, y', \ldots, y^{(k)}) = 0$, $x \in \mathbb{R}$, $y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

heißt **Differenzialgleichung (DGL)** der **Ordnung** $\boldsymbol{k}$, f die gesuchte Funktion $x \to y(x)$.

Ein y, das (1) erfüllt, nennt man **Lösung** oder **Integral** der DGL.

Oft sind mehrere DGL gleichzeitig zu behandeln: Sei z.B. v ein n-Tupel von Funktionen gegeben:
$v(x) := \left(v_1(x), \ldots, v_n(x)\right)^T$
Betrachte: $f_i(x, v, v', \ldots, v^{(k)}) = 0$; $\quad i = 1, \ldots, m$.
Dies heißt **implizites DGL-System**.

Eine DGL der Form $y^{(k)} = g(x, y, y', \ldots, y^{(k-1)})$ heißt **explizit**, während (1) **implizit** genannt wird. Entsprechend:
$v_i(k) = f_i(x, v, v', \ldots, v^{(k-1)})$, $\quad i = 1, \ldots, m$ heißt **explizites System von DGL**.
Hier: $x \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ **gewöhnliche DGL**. Falls $x \in \mathbb{R}^p \Rightarrow$ **partielle DGL**.

2. Der Existenzsatz von Peano

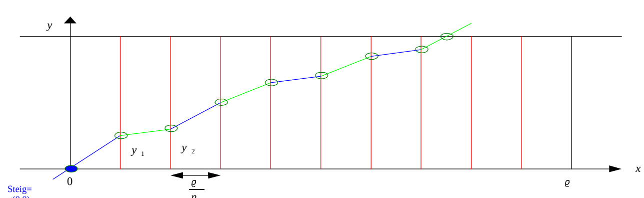
Satz 2.1: Gegeben sei das System von n expliziten DGL.

$$\begin{matrix} y'_1 = g_1(x, y_1, \ldots, y_n) \\ \vdots \\ y'_n = g_n(x, y_1, \ldots, y_n) \end{matrix} \quad , \quad y' := \begin{pmatrix} \dfrac{\mathrm{d}\, y_1}{\mathrm{d}\, x} \\ \vdots \\ \dfrac{\mathrm{d}\, y_n}{\mathrm{d}\, x} \end{pmatrix}$$

oder kurz $y' = g(x, y)$.

Falls $g: \mathbb{R}^{n+1} \supset G \to \mathbb{R}^n$ stetig ist (G ist offen), besitzt (*) mindestens eine Lösung. Diese kann so gewählt werden, dass zu beliebig vorgegebenem x_0 und Y_0 mit $(x_0, Y_0) \in G$ gilt: $y(x_0) = Y_0$.

Geometrische Idee des Beweises: Sei $y(x) \in \mathbb{R}$, und sei $g = g(x, y)$ im Bereich $|x| \le \varrho$, $|y| \le \sigma$ stetig. Ferner sei $y(0) = 0$.



Teile das Intervall $[0, \varrho]$ in n gleiche Teile ein und trage im Punkt $(x, y) = (0, 0)$ eine Gerade

der Steigung $g(0,0)$ an. Ihr Schnittpunkt mit der Geraden $x = \varrho / n$ sei $(\varrho / n , y_1)$. In diesem Punkt trägt man eine Gerade mit der Steigung $g(\varrho / n , y_1)$ an usw. Die Kurve wird fortgesetzt, bis man an die Grenzen des Bereichs $|x| \le \varrho$, $|y| \le \sigma$ kommt.
Zu zeigen: Dieses Verfahren konvergiert für $n \to \infty$ und liefert eine Lösung der DGL.

Zwei Hilfssätze:

Definition 2.2: Sei F eine Menge von Funktionen $[a, b] \to \mathbb{R}$. F heißt in x_0 (bzw. in $[a, b]$) **gleichgradig stetig**, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ und zu x_0 (bzw. zu jedem $x_0 \in [a, b]$) ein $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$ existiert mit $|y(x) - y(x_0)| < \varepsilon$ für alle $y \in F$ und alle x mit $\max(a, x_0 - \delta) < x < \min(b, x_0 + \delta)$.

Wesentlich ist dabei, dass *ein* $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$ für *alle* $y \in F$ existiert. y kann auch eine vektorwertige Funktion sein.

Definition: Eine Menge M heißt **dicht** in einer Menge A, wenn in jeder Umgebung U jedes Punktes $x \in A$ ein Punkt $p \in M$ liegt, d.h.:
$\underset{x \in A}{\forall} \underset{\eta > 0}{\forall} \underset{p \in M}{\exists} |x - p| < \eta$.

Hilfssatz 2.3: Ist die Folge $y_1, y_2, \dots$ im Intervall $[a, b]$ gleichgradig stetig und konvergiert sie in einer Punktmenge M, die in $[a, b]$ dicht ist, so konvergiert diese Folge im ganzen Intervall, und zwar gleichmäßig.

Beweis: Sei ein $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann lässt sich nach Definition 2.2 um jeden Punkt $p \in M$ eine offene Umgebung
$U_p := \{x \in [a, b] \,\big|\, |x - p| < \delta(\varepsilon, p)\}$
konstruieren.
Diese Umgebungen überdecken $[a, b]$, denn M liegt dicht in $[a, b]$: Wähle in der Definition der Dichtheit $\eta := \delta(\varepsilon, p)$, also $|x - p| < \delta(\varepsilon, p)$. Das bedeutet, dass es zu jedem $x \in [a, b]$ in p gibt, von dem es weniger als η entfernt ist. $\Rightarrow$ x liegt in einer der Umgebungen U_p.
Kompaktheit von $[a, b]$ $\Rightarrow$ es existiert eine *endliche* Teilüberdeckung dieser $\{U_p\}$, etwa $\{U_1, \dots, U_k\}$.

Es gilt:
(*) $\underset{r \in \mathbb{N}}{\forall} \underset{x \text{ mit } |x - p_j| < \delta}{\forall} |y_r(x) - y_r(p)| < \varepsilon$,
dabei sind $p_1, \dots, p_k$ die zu $U_1, \dots, U_k$ gehörigen Punkte.

Nach Voraussetzung konvergiert $y_r(p)$ für alle $p \in M$, also speziell auch für $p_1, \dots, p_k$. k ist endlich $\Rightarrow \exists$ eine gemeinsame Schranke $N \in \mathbb{N}$ mit
(**) $|y_r(p_j) - y_s(p_j)| < \varepsilon$ falls $r, s \ge N$.

Sucht man für jedes $x \in [a, b]$ ein U_j mit $x \in U_j$, so folgt aus (*) und (**):
$\underset{r, s > N}{\forall} |y_r(x) - y_s(x)| \le |y_r(x) - y_r(p_j)| + |y_r(p_j) - y_s(p_j)| + |y_s(p_j) - y_s(x)| < 3\varepsilon$.

***Bemerkung**: Dieser Satz gilt auch für vektorwertige Funktionen $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, denn der Beweis lässt sich für jede Komponente getrennt durchführen.*

Beweis $\Rightarrow$ F muss nicht notwendig abzählbar sein; es gilt auch:

Hilfssatz 2.4: Für jedes μ mit $\mu_0 < \mu < \mu_1$; $\mu_0 , \mu , \mu_1 \in \mathbb{R}$ sei im Intervall $[a , b]$ eine Funktion y_n definiert, und die Menge der y_μ sei in $[a , b]$ gleichgradig stetig. Existiert außerdem

$$\lim_{\mu \to \mu_0} y_\mu (x)$$

für eine in $[a , b]$ dicht liegende Menge von Punkten x, so existiert dieser Limes für alle $x \in [a , b]$, und zwar gleichmäßig.

Hilfssatz 2.5: Sei die Funktionenfolge $y_1 , y_2 , \ldots$ im Intervall $[a , b]$ gleichgradig stetig, und seien die $y_n (x)$ in jedem $x \in [a , b]$ beschränkt. Dann enthält die Funktionenfolge eine Teilfolge, die auf $[a , b]$ gleichmäßig gegen eine Funktion Y konvergiert.

Beweis: Man bilde eine abzählbare, im Intervall $[a , b]$ dichte Menge von Punkten $x_1 , x_2 , \cdots$. Da $y_1 (x) , y_2 (x) , \ldots$ insbesondere in x_1 beschränkt sind, existiert eine Teilfolge $y_{r_1} , y_{r_2} , \cdots$, die für $x = x_1$ konvergiert. Nach Voraussetzung ist auch $y_{r_1} , y_{r_2} , \cdots$ in x_2 beschränkt $\Rightarrow$ es existiert eine Teilfolge hiervon, $y_{s_1} , y_{s_2} , \cdots$, die in x_2 (und x_1) konvergiert. Fahre fort für alle x_i .
$y_{r_1} (x) , y_{r_2} (x) , \ldots$ konvergiert in x_1 ,
$y_{s_1} (x) , y_{s_2} (x) , \ldots$ konvergiert in x_1 , x_2 ,
$y_{t_1} (x) , y_{t_2} (x) , \ldots$ konvergiert in x_1 , x_2 , x_3 ,
wo jede Zeile eine Teilfolge der vorhergehenden ist. Bilde die Diagonalfolge (1) $y_{r_1} , y_{s_2} , y_{t_3} , \cdots$, sie konvergiert für jedes x_k, da sie abgesehen von den ersten $k-1$ Gliedern eine Teilfolge der k-ten Zeile ist. $\Rightarrow$ (1) konvergiert auf einer in $[a , b]$ dichten Punktmenge. Hilfssatz 2.3: Die Funktionenfolge (1) ist auf dem *ganzen* Intervall $[a , b]$ gleichmäßig konvergent.

Satz 2.6: Seien $x \in \mathbb{R}$ und $y (x) \in \mathbb{R}^n$. Ist die Funktion $g : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n , (x , y) \to g (x , y)$ im abgeschlossenen Parallelstreifen. $u \le x \le u + \varrho$ (y beliebig) stetig und beschränkt, so gibt es für ein beliebiges $Y_0 \in \mathbb{R}^n$ mindestens eine Integralkurve der DGL $y' = g (x , y)$, die für alle $u \le x \le u + \varrho$ existiert und $y (u) = Y_0$ erfüllt.

Beweis: Näherungslösungen: Zerlege $[u , u + \varrho]$ in n gleiche Teile.
Teilpunkte: $u = u_0 <_1$ ¿ $\ldots < u_n = u + \varrho$, d.h.
$n (u_j - u_{j-1}) = \varrho$ für alle $j = 1 , \ldots , n$.
Zu diesen Teilintervallen werden Funktionen y_n definiert:

1) Für $x \le u$ sei $y_n (x) = Y_0$.

2) Ist $y_n (x)$ schon für $x \le u_j$ definiert, so setzt man:
(1) $y_n (x) := y_n (u_j) + (x - u_j) \, g (u_j , y_n (u_j))$ für $u_j \le x \le u_{j+1}$

Dann ist u_n auch für $x \le u_{j+1}$ stetig.
Konstruktion für alle $j = 0 , \ldots , n-1$:

(2) $\begin{cases} Z_n(x) := y'_n(x) = g(u_j, y_n(u_j)) & \text{für } u_j < x \le u_{j+1},\ 0 \le j \le n-1 \\ Z_n(u) := g(u, Y_0) \end{cases}$

Dabei ist an der Stelle u_{j+1} die linksseitige Ableitung zu nehmen.

(1) $\Rightarrow$

(3) $y_n(x) = Y_0 + \int_u^x Z_n(t)\,\mathrm{d}t$ für $u \le x \le u + \varrho$.

Ist A das Supremum von $|g(x, y)|$, so ergibt sich aus (2), (3):

(4) $|y_n(x)| \le |Y_0| + \varrho A$ und

(5) $|y_n(x_2) - y_n(x_1)| \le |x_2 - x_1| \cdot A$

Rechte Seite von (5) ist unabhängig von $n \Rightarrow$ Voraussetzungen von 2.5 sind erfüllt. $\Rightarrow \exists$ in der Folge von $y_1(x)(x), y_2(x), \ldots$ eine Teilfolge $y_{k_1}(x), y_{k_2}(x), \ldots$, die für $u \le x \le u + \varrho$ *gleichmäßig* gegen eine Funktion $Y(x)$ konvergiert. Y ist stetig, da jedes y_n stetig ist. Außerdem: $Y(u) = Y_0$, da

$\forall_n Y_n(u) = Y_0$.

Zu zeigen: Y ist Lösung der DGL. Bei gegebenem n gibt es zu jedem $x \in [u, u + \varrho]$ genau ein j mit $u_j \le x < u_{j+1}$; $u_{j+1} - u_j = \varrho / n$.

Für $n \to \infty$ konvergieren daher die u_j gleichmäßig gegen x, denn $|u_j - x| \le |u_j - u_{j-1}| = \varrho / n$. Die Schranke ϱ / n ist unabhängig von x (5) $\Rightarrow$

(6) $|y_n(x) - y_n(u_j)| \le \varrho / n\ A$.

Satz: „Eine stetige Funktion ist auf einem kompakten Intervall gleichmäßig stetig.“

Wegen dieses Satzes und wegen (4) und $x \in [u, u + \varrho]$, $|Y(x)| \le |Y_0| + \varrho A$ folgt: Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein δ, das unabhängig von x (und von n) ist und

(7) $g(x, Y(x)) - g(u_j, Y_n(u_j)) < \varepsilon$

für $|x - u_j| + |Y(x) - y_n(u_j)| < \delta$ erfüllt.

Zu zeigen: $|x - u_j| + |Y(x) - y_n(u_j)| \to 0$ für $n \to 0$. Dabei beschränkt man sich auf solche n, die in der Folge $k_1, k_2, \ldots$ enthalten sind, für die y_n konvergiert.

$$|x - u_j| + |Y(x) - y_n(u_j)| \le \frac{\varrho}{n} + |Y(x) - y_n(x)| + |y_n(x) - y_n(u_j)|$$

(6) $\Rightarrow$ $|y_n(x) - y_n(u_j)| \le \dfrac{\varrho}{n} \cdot A$

y_n konvergiert gleichmäßig gegen $Y \Rightarrow$ für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit [...]

Für $n \to \infty$ geht dies $\to 0$, d.h. δ in (7) wird beliebig klein für $n \to \infty$. δ unabhängig von x, d.h. (siehe $z_n(x) \equiv g(u_j, y_n(u_j))$ (2)) konvergiert gleichmäßig gegen $Z(x) := g(x, Y(x))$.

(3) $\Rightarrow Y(x) = Y_0 + \int_u^x Z(t)\,\mathrm{d}t = Y_0 + \int_u^x g(t, Y(t))\,\mathrm{d}t$ für $u \le x \le u + \varrho$.

Differenzieren $\Rightarrow$ Y erfüllt DGL. q.e.d.

Zur Erinnerung:

1) Sei $\{f_n\}$ eine Folge vn Funktionen $\mathbb{R} \supseteq [a, b] \to \mathbb{R}$, die stetig differenzierbar sind. Sowohl $\{f_n\}$ als auch $\{f'_n\}$ konvergieren gleichmäßig. Dann gilt:
$\left(\lim_{n \to \infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n \to \infty} f'_n(x)$
Hier für *nicht* stetig differenzierbar.

2) Sei $\{f_n\}$ eine Folge von *stetigen* Funktionen $\mathbb{R} \supseteq [a, b] \to \mathbb{R}$, die gleichmäßig konvergiert. Dann gilt:

$$\int_a^b \left(\lim_{n \to \infty} f_n(x) \right) \mathrm{d}\, x = \lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x) \,\mathrm{d}\, x \,.$$

Satz 2.7 (Peano): Seien $u \in \mathbb{R}$ und $Y_0 \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Die Funktion

$g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, (x, y) \to g(x, y)$

sei im abgeschlossenen Bereich $|x-u| \le a\,;\, |y-Y_0| \le b$ stetig (also auch beschränkt), etwa $|g(x, y)| \subseteq A(x)$ mit integrierbarem A. Ferner sei α so gewählt, dass $0 < \alpha \le a$,

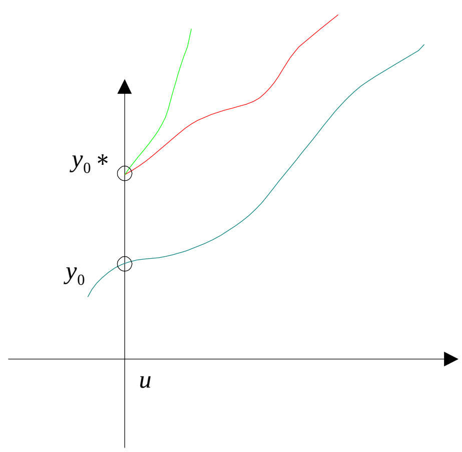
$$\int_u^x A(t) \,\mathrm{d}\, t \le b$$

für $|x-u| \le \alpha$ gilt.

Dann hat die DGL $y' = g(x, y)$ mindestens eine Lösung, die für $|x-u| \le \alpha$ existiert und $y(u) = Y_0$ erfüllt.

Beweis: Definiert man für $|y-Y_0| > b$:

$$g(x, y) := g\left(x, Y_0 + b \frac{y - Y_0}{|y - Y_0|} \right),$$



so gilt für $|x-u| \le \alpha$, y beliebig:

1) g ist definiert

2) g ist stetig

3) $|g(x, y)| \le A(x)$

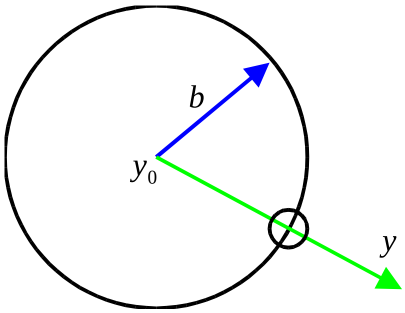
Satz 2.6 $\Rightarrow$ Es existiert eine Lösung $y(x)$ für $u \le x \le u+\alpha$ mit $y(u) = Y_0$.

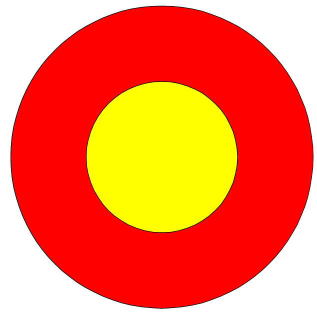
Analog: $g(-x, y)$ erfüllt für $-u \le x \le -u+\alpha$ die Voraussetzung von Satz 2.6 mit $-u$ statt u. Sei in diesem Intervall $\bar{y}$ die Lösung von $\bar{y}(x)' = -g(-x, \bar{y})$ mit $\bar{y}(-u) = -Y_0$. Dann ist $y(x) := -\bar{y}$ für $u - \alpha \le x \le u$ definiert und erfüllt $y(u) = Y_0$. An der Stelle u geht dieses y stetig differenzierbar in das oben definierte y über, da g stetig ist. Insgesamt ist also $y(x)$ im ganzen Intervall $|x-u| \le \alpha$ definiert, und es gilt:

$$\left|y(x)-Y_0\right| = \left|\int_u^x g(t, y(t))\,\mathrm{d}t\right| \le \int_u^x \left|g(t, y(t))\right|\,\mathrm{d}t \le \int_u^x A(t)\,\mathrm{d}t \le b\,,$$

d.h. die Lösung y bleibt für $|x-u| \le \alpha$ ganz im Bereich $\left|y-Y_0\right| \le b$.

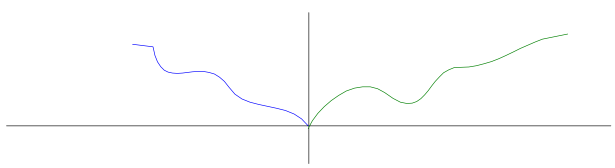
Beweis von Satz 2.1: G ist offen. Folglich existiert um jeden Punkt $(x_0, Y_0) \in G$ eine offene Umgebung $|x-u| < \bar{a}$, $\left|y-Y_0\right| < \bar{b}$, die ganz in G liegt. Wähle ein $a < \bar{a}$ und $b < \bar{b}$ und wende Satz 2.7 an. Beachte, dass sich o.B.d.A. A stets integrierbar (z.B. stetig) wählen lässt.





Beispiel, wenn keine Lösung existiert:

$$g(x, y) = g(x) = \begin{cases} 1 \text{ für } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

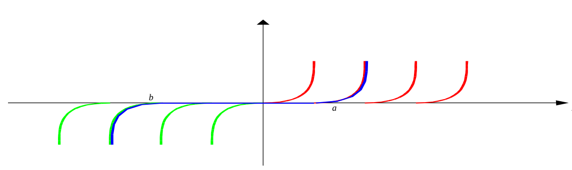


3. Eindeutigkeit

Beispiel: $y' = 2\sqrt{|y|}$ erfüllt auf $\mathbb{R}$ die Voraussetzung von Satz 2.1. Sie besitzt folgende Lösungen durch $(0, 0)$, d.h. $y(0) = 0$.

$$y = \begin{cases} (x-a)^2 \text{ für } x > a > 0 \\ -(x-b)^2 \text{ für } x < b < 0 \end{cases}$$

Außerdem ist $y(x) \equiv 0$ Lösung.



Unendlich viele Lösungen durch (u, Y_0).

Hilfssatz 3.1: Sei die Funktion

$g: \mathbb{R}^{n+1} \ni (x, y) \to g(x, y) \in \mathbb{R}^n$

um

$G : |x-u| < a \; ; \; |y - Y_0| < b$
mit gegebenem $u \in \mathbb{R}$, $Y_0 \in \mathbb{R}^n$ stetig.
Sie genüge außerdem der Bedingung
(1) $|x-u|\cdot|g(x\,,\,y_2)-g(x\,,\,y_1)| \le |y_2-y_1|$ für alle $(x\,,\,y_j)\in G$.
Dann besitzt die DGL $y' = g(x\,,\,y)$ in G genau eine Lösung durch den Punkt $(u\,,\,Y_0)$.

Beweis: Sei $x\in[\alpha\,,\,\beta]$ mit $u-a<\alpha<\beta<u+\alpha$, und seien $y_1(x)$ und $y_2(x)$ zwei Integrale der DGL durch $(u\,,\,Y_0)$. Dann gilt wegen (1)

$$|y_2(x)-y_1(x)| = \left|\int_u^x \{g(t\,,\,y_2(t))-g(t\,,\,y_1(t))\}\,\mathrm{d}\,t\right| \le \left|\int_u^x |g(t\,,\,y_2(t))-g(t\,,\,y_1(t))|\,\mathrm{d}\right.$$

$$\le \left|\int_u^x \left|\frac{y_2(t)-y_1(t)}{t-u}\right| \mathrm{d}\,t\right| \quad (2)$$

Aus $y_1(u)=y_2(u)=Y_0$ folgt:

$$\lim_{t\to u}\frac{y_2(t)-y_1(t)}{t-u} = \lim_{t\to u}\left\{\frac{y_2(t)-y_2(u)}{t-u} - \frac{y_1(t)-y_1(u)}{t-u}\right\}$$

$$= y'_2(u)-y'_1(u) = g(u\,,\,Y_0)-g(u\,,\,Y_0)=0 \quad (3)$$

$\Rightarrow$ Existenz des Integrals (2) gesichert (für $t\to u$).

(3) $\Rightarrow$ $f(x) := \left|\frac{y_2(x)-y_1(x)}{x-u}\right|$

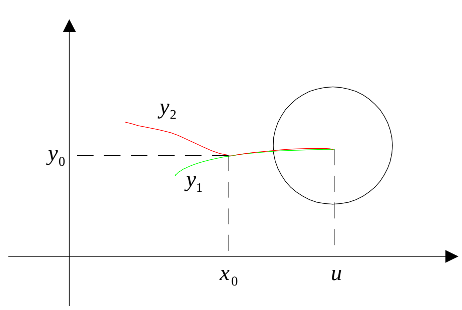
wird durch $f(u):=0$ zu einer an u stetigen Funktion ergänzt. f ist auf $[\alpha\,,\,\beta]$ stetig $\Rightarrow$ f nimmt auf $[\alpha\,,\,\beta]$ ihr Maximum M an. Dies sei an $x=\xi$.

Annahme: $M>0$. Da $f(u)=0$, folgt $\xi\ne 0$.

(2) $\Rightarrow$ $M = \left|\frac{y_2(\xi)-y_1(\xi)}{\xi-u}\right| - \frac{1}{|\xi-u|}\,M\,|\xi-u| = M$ *Widerspruch!*

Also war die Annahme falsch, d.h. $M=0$ und somit $y_1(x)\equiv y_2(x)$.

Hilfssatz 3.2: Sei die Funktion $g : \mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}^n$ in der offenen Menge $G\subseteq\mathbb{R}^{n+1}$ stetig. Ferner gelte für jeden Punkt $(x_0\,,\,y_0)\in G$ die Bedingung (1) in einer beliebigen Umgebung U von $(x_0\,,\,y_0)$, d.h. für lle $(x\,,\,y)\in U$ (d.h. in (1) wird u durch x_0 ersetzt). Dann geht durch jeden Punkt von G genau 1 Integralkurve.



Beweis: Nur noch die Eindeutigkeit zu beweisen. Beginne am Anfangswert $(u\,,\,Y_0)$. Hilfssatz 3.1 $\Rightarrow$ Eindeutigkeit in derjenigen Umgebung U von $(u\,,\,Y_0)$, in der (1) gilt.

Annahme: Es existieren zwei Lösungen y_1, y_2 mit $y_1 \neq y_2$, aber $y_1(x) = y_2(x)$ für $x \in U$. Also gibt es ein x_0 mit:

1) y_j ist in einer Umgebung von x_0 definiert

2) $y_1(x_0) = y_2(x_0)$

3) Zu jedem $\delta > 0$ existiert ein x_1 mit $y_1(x_1) \neq y_2(x_1)$ und $|x_1 - x_1| < \delta$

In G gilt: y_j ist Lösung der DGL $\Rightarrow$ y_j ist differenzierbar $\Rightarrow$ y_j ist stetig.
Sei U_0 die Umgebung von $(x_0, y_1(x_0))$, in der (1) gilt. Stetigkeit von y_j: kann x_1 so gewählt werden, dass $(x_1, y_1(x_1))$ *und* $(x_1, y_2(x_1))$ in U_0 liegen. Hilfssatz 3.1 $\Rightarrow$ $y_1(x_1) = y_2(x_1)$ *Widerspruch!*
Also war die Annahme falsch.

Definition 3.3: Ist eine Funktion $g: \mathbb{R}^{n+1} \supseteq G \to \mathbb{R}^n$ in einer Umgebung G eines Punktes ($(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ definiert und erfüllt dort die Bedingung
$|g(x, y_2) - g(x, y_1)| \leq M \cdot |y_2 - y_1|$,
so sagt man, g erfüllt im Punkt (x_0, y_0) eine **Lipschitz-Bedingung** mit der **Lipschitz-Konstanten** M.

Wichtig: *Lipschitz-Stetigkeit:* $|g(z_2) - g(z_1)| \leq M\, |z_2 - z_1|$.
Die Lipschitz-Bedingung muss für alle $(x, y_1), (x, y_2)$ *in einer* Umgebung *von* (x_0, y_0) *erfüllt sein.*
$g: \mathbb{R}^{n+1} \supseteq G \to \mathbb{R}^n$ *erfüllt eine Lipschitz-Bedingung* in einer offenen Menge G, *wenn* g *eine Lipschitz-Bedingung in jedem Punkt von* G *erfüllt. Dabei darf sich die Lipschitz-Konstante* M *von Punkt zu Punkt ändern.*

Die Lipschitz-Bedingung ist also stets in einem Punkt (x_0, y_0) erfüllt, wenn die Komponenten g_i von g in einer Umgebung von (x_0, y_0) *stetige partielle Ableitungen* nach den Komponenten y_k von y besitzen.

$\frac{\partial g_i}{\partial y_k}$ stetig $\Rightarrow$ $\frac{\partial g_i}{\partial y_k}$ beschränkt in einer Umgebung von (x_0, y_0), etwa
$\left|\frac{\partial g_i}{\partial y_k}\right| \leq N$ für alle i, k

Nebenrechnung: Sei $c := y_2 - y_1$ und sei $F(t) := g_i(x, y_1 + c \cdot t)$

$$\Rightarrow \quad |g_i(x, y_2) - g_i(x, y_1)| = |f(1) - f(0)| = \left|\int_0^1 F'(t)\,\mathrm{d}t\right|$$

$$= \left|\int_0^1 \sum_j \underset{c = (c_1, \ldots, c_n)^T}{c_j} \frac{\partial g_i(x, y_1 + c \cdot t)}{\partial y_j}\,\mathrm{d}t\right| \leq N \sum_{j=1}^n |c_j| \leq N\; n \cdot |c| = N\; n\; |y_2 - y_1|$$

$$\Rightarrow |g(x, y_2) - g(x, y_1)| \leq n^2\; N\; |y_2 - y_1|,$$

d.h. die Lipschitz-Bedingung ist erfüllt, wenn $\partial g_i / \partial y_k$ für alle i, k existiert und stetig ist.

Satz 3.4: Wenn die Funktion $g : G \to \mathbb{R}^n$ in der offenen Menge $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ stetig ist und in jedem Punkt von G eine Lipschitz-Bedingung erfüllt, dann geht durch jeden Punkt von G genau eine Integralkurve der DGL $y' = g(x, y)$.

Beweis: Sei $(x_0, y_0) \in G$. Nach Voraussetzung existiert eine Umgebung U von (x_0, y_0), die durch $|x - x_0| < a$, $|y - y_0| < a$ und eine Konstante M definiert wird, so dass

$$|g(x, y_2) - g(x, y_1)| \le M\,|y_2 - y_1|$$

für alle $(x, y_i) \in U$, $i = 1, 2$ gilt.

$\Rightarrow$ Für alle Punkte von U, die

$$|x - x_0| < \mathrm{Min}\left(a, \frac{1}{M}\right)$$

erfüllen, gilt:

$$|x - x_0| \cdot |g(x, y_2) - g(x, y_1)| \le \frac{1}{M}\, M\,|y_2 - y_1| = |y_2 - y_1| .$$

Also sind die Voraussetzungen von Hilfssatz 3.2 erfüllt.

Geometrische Deutung der Lipschitz-Bedingung:

Zwei verschiedene Lösungen y_n^1, y_n^2 (n Intervalle) mit Schnittpunkt bei x^*.

$$|x^* - u_i| = \left|\frac{y_n^1(u_i) - y_n^2(u_i)}{g(u_i, y_n^1(u_i)) - g(u_i, y_n^2(u_i))}\right| \ge \frac{1}{M},$$

falls g die Lipschitz-Bedingung mit der Konstanten M erfüllt.

Wählt man daher $u_{i+1} - u_i < 1/M$, so schneiden sich die Geradenstücke zu verschiedenen Lösungen nicht (im Intervall $u_i \le x^* \le u_{i+1}$).

4. Stetige Abhängigkeit der Lösungen von den Anfangswerten und Störungen

$y' = g(x, y)$ und $\bar{y}' = \bar{g}(x, \bar{y})$

Hilfssatz 4.1 (Bellmansches Lemma): Die Funktionen $\varphi, \psi : \mathbb{R} \supset [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ seien stetig und nicht-negativ. Es gelte für eine Konstante $v > 0$:

(1) $\varphi(x) \le v + \int\limits_{x_0}^{x} \varphi(u) \cdot \psi(u)\, \mathrm{d}u$ für $x \in [x_0, x_1]$.

Dann folgt:

$$\varphi(x) \le v \cdot e^{\int_{x_0}^{x} \psi(u)\, \mathrm{d}u}$$

Beweis: (1) $\Rightarrow$

$$\frac{\varphi(x)}{v + \int\limits_{x_0}^{x} \varphi(u)\, \psi(u)\, \mathrm{d}u} \le \psi(x)$$

Integrieren:

$$\ln\left(v+\int_{x_0}^{x}\varphi(u)\,\psi(u)\,\mathrm{d}u\right)-\ln v\le\int_{x_0}^{x}\psi(u)\,\mathrm{d}u$$

mit (1):

$$\varphi(x)\le v+\int_{x_0}^{x}\varphi(u)\,\psi(u)\,\mathrm{d}u\le v\cdot e^{\int_{x_0}^{x}\psi(u)\,\mathrm{d}u}$$

Satz 4.2: Die Funktion $g:\mathbb{R}^2\supset G\to\mathbb{R}$ sei auf der offenen Menge G stetig und erfülle die Lipschitz-Bedingung mit der Lipschitz-Konstanten M. Für die stetige Funktion $g^*:\mathbb{R}^2\supset G\to\mathbb{R}$ gelte:
$|g(x,y)-g^*(x,y)|\le\varepsilon$
für alle $(x,y)\in G$. y und y^* seien die Lösungen von $y'=g(x,y)$ bzw. $y^{*\prime}=g^*(x,y)$ mit den selben Anfangsbedingungen $y(x_0)=y^*(x_0)$. Dann gilt:
$|y^*(x)-y(x)|\le\varepsilon\cdot\varrho\cdot e^{M\cdot\varrho}$ für $x_0\le x\le x_0+\varrho\,;\,x\in G$.

Beweis: Beide Lösungen erfüllen die selbe Anfangsbedingung. $\Rightarrow$

$$y-y^*=\int_{x_0}^{x}\left(g(u,y(u))-g^*(u,y^*(u))\right)\mathrm{d}u\quad\Rightarrow$$

$$|y-y^*|\le\int_{x_0}^{x}|g(u,y(u))-g^*(u,y^*(u))|\,\mathrm{d}u$$

$$\le\int_{x_0}^{x}|g(u,y(u))-g(u,y^*(u))|\,\mathrm{d}u+\int_{x_0}^{x}|g(u,y^*(u))-g^*(u,y^*(u))|\,\mathrm{d}u$$

$$\le M\int_{x_0}^{x}|y(u)-y^*(u)|\,\mathrm{d}u+\varrho\cdot\varepsilon\,.$$

Hilfssatz 4.1:
$|y-y^*|\le\varepsilon\,\varrho\,e^{M\,\varrho}$.

Satz 4.3: Die Funktion $g:\mathbb{R}^2\supset G\to\mathbb{R}$ sei auf einer offenen Menge G stetig un erfülle dort die Lipschitz-Bedingung mit einer Lipschitz-Konstante M. y und y^* seien Lösungen der DGL $y'=g(x,y)$ mit $y(x_0)=\eta$, $y^*(x_0)=\eta^*$. Es gelte $|\eta^*-\eta|\le\varepsilon$.
Dann folgt:
$|y^*(x)-y(x)|\le\varepsilon\,(1+M\,\varrho\,e^{M\,\varrho})$ für $x_0\le x\le x_0+\varrho$ und $(x,y(x)),(x,y^*(x))\in G$.

Beweis:

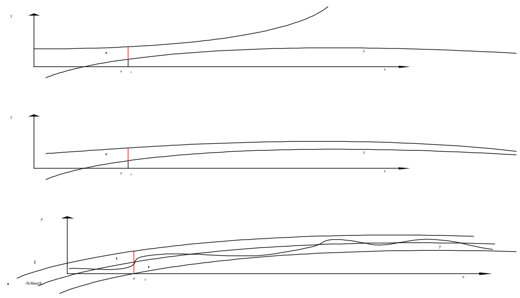
Definition $\Rightarrow$ $z(x):=y^*(x)-\eta^*+\eta\Rightarrow z(x_0)=\eta$

$z'=y'^*=g(x,z+\eta^*-\eta)=:g^*(x,z)$

$|g^*(x,z)-g(x,z)|\le M\,|\eta^*-\eta|\le M\cdot\varepsilon$

$\Rightarrow$ mit Satz 4.2: $|z-y|\le M\,\varepsilon\,\varrho\,e^{M\,\varrho}$; $x_0\le x\le x_0+\varrho$;

$$\underbrace{|y^*-y|-|\eta^*-\eta|}_{\le|z-y|}+\underbrace{|\eta^*-\eta|}_{\le\varepsilon}\le\varepsilon+M\,\varepsilon\,\varrho\,e^{M\,\varrho}=\varepsilon\,(1+M\,\varrho\,e^{M\,\varrho})$$



„zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass ...“

5. Einige elementar Integrationsmethoden von DGL 1. Ordnung

a) Exakte DGL

(1) $g(x, y) + h(x, y) \cdot y' = 0$

In diesem Kapitel 5 ist immer $x, y \in \mathbb{R}$ (außer wenn explizit das Gegenteil gesagt wird).
Falls eine stetig differenzierbare Funktion F existiert mit

(1a) $\dfrac{\partial F(x, y)}{\partial x} = g(x, y)$; $\dfrac{\partial F(x, y)}{\partial y} = h(x, y)$,

dann heißt (1) **exakte DGL** und F **Stammfunktion**. Diese Namen kommen von der Form von (1) $g \cdot \mathrm{d}x + h \cdot \mathrm{d}y = 0$.

Falls (1) exakt ist, folgt:

$$\mathrm{d}F = \frac{\partial F}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial F}{\partial y}\,\mathrm{d}y = g\,\mathrm{d}x + h\,\mathrm{d}y = 0$$

(1) $\Leftrightarrow$ Für die Lösungen y ist F konstant.

Satz 5.1: Seien g und h Funktionen $\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \to g(x, y) \in \mathbb{R}$ bzw. $\to h(x, y) \in \mathbb{R}$. Seien $g, h, (\partial g)/(\partial y)$ und $(\partial h)/(\partial x)$ in einer zusammenhängenden, einfach zusammenhängenden offenen Menge G definiert und stetig. Dann ist die DGL $g + h\, y' = 0$ genau dann exakt, wenn

(2) $\dfrac{\partial g}{\partial y} = \dfrac{\partial h}{\partial x}$

gilt.

Für $(x_0, y_0) \in G$ und eine Kurve $t \to k(t)$ von $k(t_0) =: (x_0, y_0)$ nach $k(t_1) =: (x, y)$ ist

(3) $F(x, y) := \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} \operatorname{grad} F \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x} g(t, y_0)\,\mathrm{d}t + \int_{y_0}^{y} h(x, t)\,\mathrm{d}t$

eine Stammfunktion der DGL.

Beweis:

1) II.5, II.27 $\Rightarrow$ Ist G zusammenhängend und einfach zusammenhängend (und offen): DGL exakt $\Leftrightarrow$ zu g und h existiert F mit $\operatorname{grad} F = (g, h) \Leftrightarrow \operatorname{rot}(g, h) = 0$

$\Leftrightarrow (\partial h)/(\partial x) - (\partial g)/(\partial y) = 0$.

2) Differenziation von (3) $\Rightarrow$ mit (2):

$$\frac{\partial F}{\partial x} = g(x, x_0) + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial g(x, t)}{\partial t} \, \mathrm{d}t = g(x, y).$$

Analog: $(\partial F)/(\partial y) = h \Rightarrow F$ ist Stammfunktion.

***Bemerkungen**:*

1) *Kurvenintegral ... ist wegunabhängig* $\Leftrightarrow$ *es existiert ein Potenzial* $u: A \to \mathbb{R}$, u *stetig differenzierbar in* A, $K = \mathrm{grad}\, u$. F *ist hier eine solche Funktion* u, *d.h. (3) ist wegunabhängig.*

2) *Ist* F *zweimal stetig differnzierbar, dann ist (2) notwendig;*

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \, \partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \, \partial y} = \frac{\partial h}{\partial x}.$$

Beispiel: Ist

$$\underbrace{(2x + y^2)}_{g} \, \mathrm{d}x + \underbrace{2xy}_{h} \, \mathrm{d}y = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial (2x + y^2)}{\partial y} = 2y$$

exakt?

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial (2xy)}{\partial x} = 2y \Rightarrow \text{DGL exakt.}$$

1. **Methode**:
Berechne F mit (3) mit $y_0 = y(x_0)$. y daraus durch Auflösen von F nach y.

$$F(x, y) = \int_{x_0}^{x} (2x + y_0^2) \, \mathrm{d}x + \int_{y_0}^{y} 2xy \, \mathrm{d}y = x^2 - x_0^2 + x_0 y_0^2.$$

$$F(x, y) = 0 \Rightarrow y^2 = \frac{x_0^2 - x^2 + x_0 y_0^2}{x} \text{ für } x \neq 0.$$

2. **Methode**: Berechnung von F durch Integration von (1a)

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + y^2 \Rightarrow F = x^2 + y^2 + C(y).$$

Eingesetzt in

$$\frac{\partial F}{\partial y} = h = 2xy:$$

$$\Rightarrow \frac{\partial C(y)}{\partial y} = 0 \Rightarrow C \text{ ist konstant.}$$

$$F(x_0, y_0) = 0 \Rightarrow C = -x_0^2 - x_0 y_0^2.$$

b) Integrierender Faktor

Oft ist die DGL $g(x, y) + h(x, y) y' = 0$ nicht exakt, wird aber nach Multiplikation mit $M = M(x, y)$ exakt. Dann heißt M **integrierender Faktor** oder **Eulerscher Multiplikator**.

(4) $M \cdot g + M \cdot h \cdot y' = 0$
soll die selbe Lösung wie (1) besitzen: $\Rightarrow M \neq 0$, und M soll den gleichen Definitionsbereich wie g, h besitzen.

(4) exakt $\Rightarrow \frac{\partial(M \cdot g)}{\partial y} = \frac{\partial(M \cdot h)}{\partial x}$ oder

(5) $f \frac{\partial M}{\partial y} + M \frac{\partial g}{\partial y} = h \frac{\partial M}{\partial x} + M \frac{\partial h}{\partial x}$

Partielle DGL; i.A. schwierig!! Aber einige Spezialfälle sind einfach, z.B. wenn $M = M(x)$ oder $M = M(y)$.

Beispiele:

1) $M = M(x)$.

(5) $\Rightarrow$

$$M \frac{\partial g}{\partial y} = h \frac{\partial M}{\partial x} + M \frac{\partial h}{\partial x} \Rightarrow \frac{\frac{\partial M}{\partial x}}{M} = \frac{\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial h}{\partial x}}{h}$$

Diese Gleichung ist für $h \neq 0$ lösbar $\Leftrightarrow$

$$\frac{\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial h}{\partial x}}{h}$$

nur von x und nicht von y abhängig.

2)

$$\underbrace{y^2}_{g} + \underbrace{x^2 y}_{h} y' = 0 \,, \frac{\partial g}{\partial y} = 2 y \neq \frac{\partial h}{\partial x} = 2 x y$$

$\Rightarrow$ DGL nicht exakt, aber $M = M(x)$ liefert Euler-Multiplikator.

$$\frac{M_{,x}}{M} = \frac{g_{,y} - h_{,x}}{h} = \frac{2 y - 2 x y}{x^2 y} = \frac{2 - 2 x}{x^2} \text{ für } x \neq 0 \,; \; M_{,x} := \frac{\partial M}{\partial x} \,;$$

$$\ln M + const = -\frac{2}{x} - \ln x^2 \,; \; M = K e^{-\frac{2}{x} - \ln x^2} = \frac{K}{x^2} e^{-\frac{2}{x}} \,;$$

Probe:

$$(M \cdot g)_{,y} = 2 y \frac{K}{x^2} e^{-\frac{2}{x}} \,;$$

$$(M \cdot h)_{,x} = \left(K \cdot y e^{-\frac{2}{x}}\right)_{,x} = K y e^{-\frac{2}{x}} \left(2 \frac{1}{x^2}\right) = (M g)_{,y}$$

Gilt

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial y} \text{ und } \frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{\partial h}{\partial x} \quad (*)$$

(diese Gleichungen beschreiben reguläre komplexe Funktionen $g + i h$), so folgt:

$$M = \frac{1}{g^2 + h^2}$$

ist integrierender Faktor.

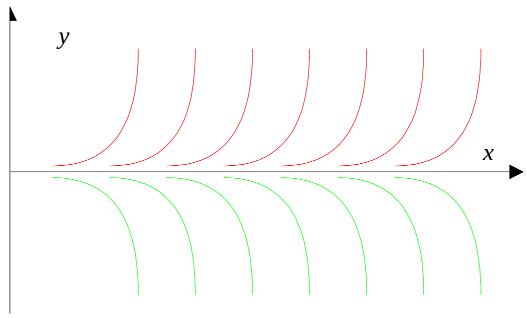
$$\int_{x_0}^{x} g(x) \, \mathrm{d} t = \int_{y_0}^{y} \frac{\mathrm{d} t}{h(t)}$$

Existenzsatz 2.7 $\Rightarrow$ Lösungskurven $y(x)$ enden *nicht* notwendig an x_1 mit $y(x_1) = 0$. Alles, was für die Existenz nötig ist, ist die *Stetigkeit* von g und h.

Beispiele:

1) $y' = y/x$ für $x \neq 0$ mit $y(x_0) = y_0$. Ist $y_0 = 0$ (für $x_0 \neq 0$), dann ist $y(x) \equiv 0$ die einzige Lösung. Für $y_0 > 0$ folgt:
$$\int_{y_0}^{y} \frac{\mathrm{d}\, y}{y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}\, x}{x}.$$
Für $x_0 > 0$, $x > 0$ ergibt sich:
$$\ln \left| \frac{y}{y_0} \right| = \ln \left| \frac{x}{x_0} \right|.$$
Man prüft sofort nach, dass $y = (y_0/x_0)\, x$ auch für $y < 0$ und für $x < 0$ eine Lösung ist.

2) $y' = y$. Außer der Lösung $y(x) \equiv 0$ (für $y_0 = 0$) existiert $y = y_0\, e^{x - x_0}$.



c) Trennung von Variablen

(6) $y' = g(x) \cdot h(y)$,
wo $g(x)$ für $a < x < b$ und $h(y)$ für $c < y < d$ stetig ist. Suche Lösung mit (x_0, y_0), d.h. $y(x_0) = y_0$.
Falls $h(y_0) = 0$ ist, ist $y(x) \equiv y_0$ eine Lösung. Ist $h(y)$ stetig differenzierbar, so folgt aus Satz 3.4, dass dies die einzige Lösung durch (x_0, y_0) ist.
Ist $h(y_0) \neq 0$, ist $h(y) \neq 0$ in einer Umgebung von y_0, da h stetig ist. $\Rightarrow$ h dort monoton
$\Rightarrow g(x) - y'/h(y) = 0$ ist exakte DGL. Lösungen aus Satz 5.1:
$$\int_{x_0}^{x} g(x)\, \mathrm{d}\, x = \int_{y_0}^{y} \frac{\mathrm{d}\, y}{h(y)}$$
Monotonie von h $\Rightarrow$ nach auflösbar.

Merkregel:
$$\frac{\partial\, y}{\partial\, x} = g(x)\, h(y) \Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}\, y}{h(y)} = \int g(x)\, \mathrm{d}\, x.$$

d) Ähnlichkeits-DGL

Sie hat die Form
$$y' = g\left(\frac{y}{x}\right);\ x \neq 0$$
Definiere $u := y/x \Rightarrow y' = u + x\, u'$ oder
$$u' := \frac{g(u) - u}{x}.\ (*)$$
Dies ist eine trennbare DGL.

Beispiel:

$$y' = \frac{x + y}{x - y}$$

Für $x \neq 0$:

$$y' = \frac{1 + \frac{y}{x}}{1 - \frac{y}{x}} =: g\left(\frac{y}{x}\right).$$

Mit (*):

$$\frac{\mathrm{d}\,x}{x} = \frac{\mathrm{d}\,u}{g(u) - u} = \frac{1}{\frac{1 + u - u + u^2}{1 - u}}\,\mathrm{d}\,u = \frac{1 - u}{1 + u^2}\,\mathrm{d}\,u$$

$$\ln|x| = \arctan u - \frac{1}{2}\ln(1 + u^2) + C;$$

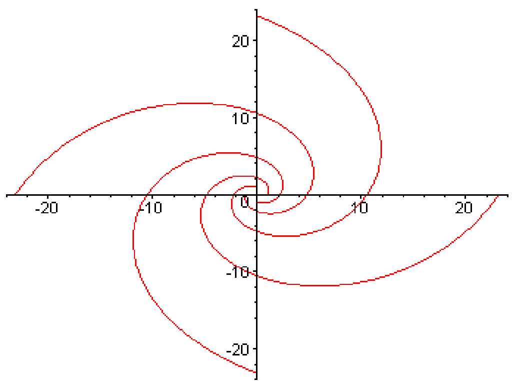
$$\ln\left[\frac{|x|}{C'}\sqrt{1 + u^2}\right] = \arctan u;\ \ln\left(\frac{1}{C'}\sqrt{x^2 + y^2}\right) = \arctan\frac{y}{x};$$

Polarkoordinaten:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},\ \tan\varphi = \frac{y}{x};$$

$$\ln\frac{r}{C} = \varphi,\ r = c\,e^{\varphi}$$

logarithmische Spirale:



e) Weitere DGL I

$$y' = f\left(\frac{a\,x + b\,y + c}{\alpha\,x + \beta\,y + \gamma}\right) \text{ mit } \begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} \neq 0:$$

Falls $c = \gamma = 0$: Ähnlichkeits-DGL. Bedeutet, dass die beiden Geraden $a\,x + b\,y + c = 0$ und $\alpha\,x + \beta\,y + \gamma = 0$ in $(0, 0)$ schneiden.

Da

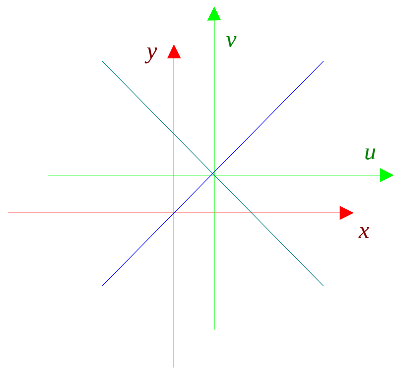
$$\begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} \neq 0,$$

schneiden sich die Geraden auch für $c \neq 0$ und/oder $\gamma \neq 0$. Der Schnittpunkt sei (p, q).

(7) $a\ p + b + q + c = 0$ und $\alpha\ p + \beta\ q + \gamma = 0$.

Die Transformation
(8) $u := x - p\ ;\ v := y - q$ liefert wegen (7):

$$f\left(\frac{a\ x + b\ y + c}{\alpha\ x + \beta\ y + \gamma}\right) = f\left(\frac{a\ u + b\ v + \overbrace{a\ p + b\ q + c}^{=0\ \text{wg. (7)}}}{\alpha\ u + \beta\ v + \underbrace{\alpha\ p + \beta\ q + \gamma}_{=0}}\right) = f\left(\frac{a\ u + b\ v}{\alpha\ u + \beta\ v}\right)$$



(8) $\Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}\ v}{\mathrm{d}\ u} = \dfrac{\mathrm{d}\ y}{\mathrm{d}\ x}$.
Daher geht die DGL

$$y' = f\left(\frac{a\ x + b\ y + c}{\alpha\ x + \beta\ y + \gamma}\right)$$

über in die Ähnlichkeits-DGL

$$\frac{\mathrm{d}\ v}{\mathrm{d}\ u} = f\left(\frac{a\ u + b\ v}{\alpha\ u + \beta\ v}\right).$$

f) Weitere DGL II

$$y' = f\left(\frac{a\ x + b\ y + c}{\alpha\ x + \beta\ y + \gamma}\right) \text{ mit } \begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = 0$$

Sind hier $\beta = 0$ *und* $b = 0$, so ist f nur eine Funktion von x und die DGL ist elementar integrierbar.

Sei nun $\beta \neq 0$. Definiere $v := \alpha\ x + \beta\ y + \gamma \Rightarrow (\mathrm{d}\ v)/(\mathrm{d}\ x) = \alpha + \beta\ y'$. Wegen

$$\begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = 0$$

folgt:

$$\frac{a\ x + b\ y + c}{\alpha\ x + \beta\ y + \gamma} = \frac{\beta\ a\ x + \beta\ b\ y + \beta\ c}{\beta\ v} = \frac{b\ \alpha\ x + b\ \beta\ y + b\ \gamma + \beta\ c - b\ \gamma}{\beta\ v} = \frac{b\ v + \beta\ c - b\ \gamma}{\beta\ v};$$

$$\frac{\mathrm{d}\ v}{\mathrm{d}\ x} = \alpha + \beta\ f\left(\frac{b\ v + \beta\ c - b\ \gamma}{\beta\ v}\right).$$

Rechte Seite hängt nur von v ab: trennbare DGL.

Im Fall $b \neq 0$ führt die Substitution $v = a\ x + b\ y + c$ auf die DGL:

$$\frac{d\,v}{d\,x} = a + b\; f\left(\frac{b\,v}{\beta\, v + b\,\gamma - \beta\, c}\right).$$

Beispiel:

$y' = \frac{x+y}{-x-y+1}$; $v := -x - y + 1$;

$v' = -1 + \frac{v-1}{v} = -\frac{1}{v}$;

$\int_{x_0}^{x} d\,x = -\int_{v_0}^{v} v\, d\,v$;

$x = -\frac{1}{2}\,v^2 + k = -\frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + 1 + 2\,x\,y - 2\,x - 2\,y\right) + k$.

Lösungskurven:

$x^2 + y^2 + 2\,x\,y - 2\,y + K = 0$.

g) Die dimensionierte DGL

Die DGL $y' = f(x, y)$ heißt **dimensioniert**, wenn ein $m \in \mathbb{R}$ existiert, für das

$f(x, y\,x^m) = f(1, y)\,x^{m-1}$

gilt.

Definiere v durch $y = x^m \cdot v \;\Rightarrow\; y' = x^m\,v' + m\,x^{m-1}\,v = f(x, y^m\,v) = f(1, v)\,x^{m-1}$.

Für $x \neq 0 \Rightarrow$

$v' = \frac{1}{x}\left[f(1, v) - m\,v\right]$,

also eine trennbare DGL.

Beispiele:

1) $y' = x + y^2\,x^{-3} \Rightarrow m = 2$

Setze $y = x^2\,v \Rightarrow$

$\frac{v'}{1 + v^2 - 2\,v} = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{v-1} = \ln|x| + K$

Nebenrechnung:

$f(x, y\,x^2) \overset{!}{=} f(1, y)\,x$; $x + y^2\,x^4 \cdot x^{-3} = x\,(1 + y^2)$;

$y = x^2\left(1 - \frac{1}{\ln|x| + K}\right)$

2) $y' = f(x, y) := x^r + y^s\,x^t$ mit $r, s, t \in \mathbb{R}$

$f(1, y)\,x^{m-1} = (1 + y^s)\,x^{m-1}$, $f(x, y\,x^m) = x^r + y^s\,x^{m \cdot s + t}$;

Koeffizientenvergleich: $r = m - 1$; $m \cdot s + t = m - 1$; $\Rightarrow m = r + 1$; $t = r - (r+1) \cdot s$;

h) Die lineare DGL

(9) $y' + p(x)\,y = r(x)$ **inhomogene lineare DGL**

(10) $y' + p(x)\,y = 0$ **homogene lineare DGL**

Allgemeine Lösung von (9) = spezielle Lösung von (9) + allgemeine Lösung von (10).

(10) trennbare DGL Lösung:

$$\int \frac{\mathrm{d}\ y}{y} = -\int\ p\,(x)\,\mathrm{d}\ x + K_1$$

oder

$$y = y_0\ e^{-\int_{x_0}^{x} p\,(t)\,\mathrm{d}\ t}$$

Spezielle Lösung von (9) durch Variation der Konstanten: Gehe mit dem Ansatz $y_0 \to C\ (x)$, d.h.

$$y\,(x) = C\ (x)\ e^{-\int_{x_0}^{x} p\,(t)\,\mathrm{d}\ t}$$

in (9) ein:

$$C'\ e^{-\int p\ \mathrm{d}\ t} - C \cdot p\ e^{-\int p\ \mathrm{d}\ t} + p\ C\ e^{-\int p\ \mathrm{d}\ t} = r$$

$$C' = r\ e^{\int_{x_0}^{x} p\,(t)\,\mathrm{d}\ t}\ ;\ C\ (x) = \int^{x} r\ (s)\ e^{\int^{s} p\,(t)\,\mathrm{d}\ t}\ \mathrm{d}\ s + K_3$$

$$y = e^{-\int^{x} p\,(t)\,\mathrm{d}\ t}\left[K_3 + \int^{x} r\ (s)\ e^{\int^{s} p\,(t)\,\mathrm{d}\ t}\ \mathrm{d}\ s\right].$$

$$e^{\int_{x_0}^{x} p\,(u)\,\mathrm{d}\ u}$$

ist integrierender Faktor $M = M\ (x)$.

Sind sowohl $p\,(x)$ als auch $r\,(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ stetig, so existiert die Lösung $y\,(x)$ für *alle* $x \in \mathbb{R}$ (und alle Anfangsbedingungen $y\,(x_0) = y_0$) (folgt aus Satz 2.7).

i) Die Bernoullische DGL

Die Wachstumsrate $\dot{y}/\,y$ sei linear: $\dot{y}/\,y = p + r \cdot y$.

Bernoullische DGL:

(12) $y' + p\,(x) \cdot y = r\,(x) \cdot y^n\ ;\quad n \in \mathbb{R}\ ,\ n \neq 1$ ($n = 1$ wäre eine lineare DGL)

Substitution:

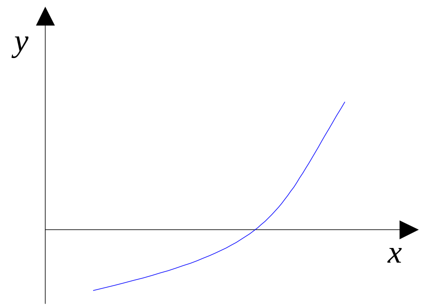
$$y^{1-n} =: v\ ;\Rightarrow\ y' = v'\ \frac{v^{\frac{n}{1-n}}}{1-n}$$

Einsetzen in (12) liefert:

$$\frac{v'}{1-n}\ v^{\frac{n}{1-n}} + p \cdot v^{\frac{1}{1-n}} = r \cdot v^{\frac{n}{1-n}}\ ;$$

$$\frac{v'}{1-n} + p \cdot v = r \quad \text{lineare DGL für } v$$

Bei dieser Ableitung muss $y \neq 0$ vorausgesetzt werden. Das ist auch in (12) nötig, wenn man beliebige negative n zulässt.



$y(x) \equiv 0$ ist Lösung der DGL!

Beispiel:

$$y' + \frac{y}{x} = x^2 \cdot y^2 \,;$$

$$v = y^{-1} \Rightarrow -v' + \frac{1}{x} v = x^2 \,;$$

Lineare DGL; zugehörige homogene DGL: $v'/v = 1/x$ hat als Lösung: $\ln |v| = \ln |x| + \ln |C_2|$.
$v = C_2 \cdot x$ (gilt auch für $v < 0$ und/oder $x < 0$!)

Variation der Konstanten:
$v = C(x) \cdot x \Rightarrow v' = C' x + C$ einsetzen in DGL; für $x \neq 0$: $C' x + C - C = -x^2 \Rightarrow$
$C' = -x \,;\, C = -x^2/2 + C_1 \,;$

$$v = -\frac{x^3}{2} + x\, C_1 \,;\; y = \frac{1}{x\, C_1 - x^3/2} \,.$$

j) Integration durch Differenziation

Diese Methode sucht Lösungen in Parameterform (Parameter: $t := y'$). Implizite DGL:

(13) $F(x, y, y') = 0$

($\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial y'}$ sollen existieren und stetig sein)

Das Verfahren liefert nur solche Lösungen $y(x)$, für die y'' existiert und $y''(x) \neq 0$ ist.
Differenziert man (13) nach $t := y'$, so folgt:

$$\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\mathrm{d}\, x}{\mathrm{d}\, t} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \underset{t = \frac{\mathrm{d}\, y}{\mathrm{d}\, x}}{t} \cdot \frac{\mathrm{d}\, x}{\mathrm{d}\, t} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0$$

Ist $(\partial F)/(\partial x) + t\,(\partial F)/(\partial y) \neq 0$, gilt:

$$\text{(14)} \quad \frac{\mathrm{d}\, x}{\mathrm{d}\, t} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial t}}{\frac{\partial F}{\partial x} + t \frac{\partial F}{\partial y}} \,;\, \frac{\mathrm{d}\, y}{\mathrm{d}\, t} = t \cdot \frac{\mathrm{d}\, x}{\mathrm{d}\, t} = \frac{-t \frac{\partial F}{\partial t}}{\frac{\partial F}{\partial x} + t \frac{\partial F}{\partial y}} \,;$$

Meist benötigt man nur eine dieser Gleichungen, nämlich wenn (13) nach x oder nach y aufgelöst werden kann.

1. Fall: (13) sei nach y auflösbar:

   (15) $y = G(x, y') \equiv G(x, t)$

   1. Gleichung von (14):

$$\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t}=\frac{\dfrac{-\partial G}{\partial t}}{\dfrac{\partial G}{\partial x}-t}$$

Dies liefert mit (15) die Parameterdarstellung $x = x(t)$ (Lösung von (14)), $y = G(x(t), t)$.

2. Fall: Lässt sich (13) nach x auflösen, d.h. $x = H(y, y') \equiv H(y, t)$, so gilt:

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t}=\frac{-t\,\dfrac{\partial H}{\partial t}}{t\,\dfrac{\partial H}{\partial y}-1}\,.$$

Ein Beispiel liefert:

k) Die d'Alembertschen DGL

(17) $y = x\cdot f(y') + g(y')$

Aus (16):

(18) $\dfrac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t}=\dfrac{x\cdot f_t+g_t}{t-f(t)}\ ;\ f_t := \dfrac{\partial f(t)}{\partial t}\ ,\ g_t := \dfrac{\partial g(t)}{\partial t}\ ;$

Bei (14) gilt die Voraussetzung:

$$\frac{\partial F}{\partial x}+t\,\frac{\partial F}{\partial y}=f(t)-t\neq 0\,.$$

Es existiere ein $\bar t$ mit $f(\bar t)=\bar t$. Dann folgt aus (17):

(19) $y = x\cdot\bar t + g(\bar t)$

Lösung!!

Beispiel: $y = (y')^2\cdot x$.

Untersuche $f(\bar t)=\bar t$: d.h. $\bar t^2=\bar t$ mit den Lösungen $\bar t = 0, \pm 1 \Rightarrow$ Lösungen:

1.) $y \equiv 0$

2.) $y = x$

(18) $\Rightarrow$

$$\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t}=\frac{x\cdot 2\,t}{t-t^2}\ ;\ \frac{\mathrm{d}\,x}{x}=\frac{2\,\mathrm{d}\,t}{1-t}\ ;\ x = C\,\frac{1}{(1-t)^2}$$

l) Die DGL y'' = f(y)

Zwischenintegrale; Erhaltungssätze: Die DGL beschreibt die Bewegung eines Massepunkts (mit der Masse 1) unter der Kraft f ohne Reibung. Sei

(20) $F(y) := \displaystyle\int_{y_0}^{y} f(t)\,\mathrm{d}\,t$

$\Rightarrow\ y'' = f(y)$ geht über in

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left(\frac{1}{2}\,y'^2\right)=\frac{\mathrm{d}\,F}{\mathrm{d}\,y}\cdot y'$$

oder

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left(\frac{1}{2}\,y'^2 - F\,(\,y\,(x))\right) = 0\,,$$

d.h.:

(21) $\frac{1}{2}\,y'^2 - F\,(\,y\,(x)) = E \in \mathbb{R}$

Deutung: $1/2\;y'^2$ ist die kinetische Energie, $-F\,(\,y\,(x))$ ist die potenzielle Energie, E ist die Gesamtenergie.

E wird durch die Wahl von y_0 in (20) eindeutig festgelegt.

***Beachte**: In (21) ist $1/2\;y'^2 \geq 0$, daraus folgt $-F\,(\,y\,(x)) \leq E$, d.h. die Teilchenbahn $y\,(x)$ liegt so, dass die kinetische Energie ≥ 0 bleibt. (21) $\Rightarrow$ $y' = \pm\sqrt{2\,(E + F\,(\,y\,(x)))}$ trennbare DGL:*

$$x - x_0 = \pm \int_{y_0}^{y\,(x\,(t))} \frac{\mathrm{d}\,t}{\sqrt{2\,(E + F\,(\,t))}}\,.$$

Lösungsweg für einfache DGLen 1. Ordnung

Man überprüft den Typ der DGL am Besten in folgender Reihenfolge:

Ist die DGL leicht nach y' auflösbar?

Nein:

$F\,(x\,,\;y\,,\;y') = 0$. Integration durch Differenziation

a) d'Alembertsche DGL

b) $\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = \ldots$

c) $\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} = \ldots$

Ja:

Ist es eine trennbare DGL?

Ausklammern!

Ist es eine lineare DGL?

Ausklammern!

Ist es eine Bernoullische DGL?

Zwei Möglichkeiten: Untersuche das Argument von g.

1) $f = f\left(\frac{y}{x}\right)$: Ähnlichkeits-DGL (Brüche erweitern!)

2) $f = f\left(\frac{a\;x + b\;\;y + c}{\alpha\;x + \beta\;\;y + \gamma}\right)$ (Brüche erweitern)

Wenn beides nicht funktioniert:

Ist es eine exakte DGL?

Ausklammern! Integrierende Faktoren $M = M(x)$, $M = M(y)$.

Ist es eine dimensionierte DGL?

Oft von der Gestalt:
$$g = \sum_i a_i \, y^{s_i} \, x^{t_i}$$
mit $a_i, s_i, t_i \in \mathbb{R}$

Hier nicht behandelte DGL, z.B. Riccati

Entweder: Kamke (dickes, schönes Buch – umfangreiche Sammlung von DGLen, weltweit ziemlich einmalig (Kamke hat als Jude das 3. Reich überlebt, weil sein Buch als kriegswichtig erachtet wurde! Hat sich anschließend an der TUM um einen Lehrstuhl beworben, wurde aber abgelehnt.)), oder Computerprogramm.

6. Lineare DGL-Systeme 1. Ordnung

Linear heißt: linear in y, nach y aufgelöst, d.h.:

$$\begin{aligned} y'_1 &= a_{11}(x)\cdot y_1 + \ldots + a_{1n}\, y_n + b_1(x) \\ &\vdots \\ y'_m &= a_{m1}(x)\cdot y_1 + \ldots + a_{mn}\, y_m + b_m(x) \end{aligned} \tag{1}$$

Bequemer:
$y' = A(x)\cdot y + b(x)$
$A(m, n)$ Matrix
$b(x) \in \mathbb{R}^m$

6.1 Lösung des homogenen Problems

a) Existenz einer Lipschitz-Konstanten

Die zu (1) gehörige homogene DGL:

(2) $y' = A(x)\cdot y$

$A(x)$: (m, n)-Matrix mit den Elementen $a_k^i(x)$. Setze $m = n$: Peano!!

$M(x) := \max_{i,k} \left| a_k^i(x) \right|$

$y_i(x) \in \mathbb{R}^n$: zwei Lösungen
$$\left| A(x)\, y_1 - A(x)\, y_2 \right| = \left| \sum_k a_k^i \left(y_1^k - y_2^k \right) \right| \le \sum_{i,k} \left| a_k^i \left(y_1^k - y_2^k \right) \right| \le M \sum_{i,k} \left| y_1^k - y_2^k \right| \le M\, n^2 \left| y_1 - y_2 \right|$$
Also ist die Lipschitz-Bedingung erfüllt.

b) Lösungsbasis

Ist die Matrix $A(x)$ in einer offenen und zusammenhängenden Menge G stetig, so folgt aus Satz 2.7 (oder 2.1), dass durch jeden Punkt von G eine Lösung geht.

Satz 6.1: Sind y_1 und y_2 Lösungen der DGL $y' = A(x) \cdot y$, dann ist auch $a\ y_1 + b\ y_2$ eine Lösung für $a\,, b \in \mathbb{R}$.

Beweis: Durch Einsetzen in (2).

Seien $e_1\,, \ldots\,, e_n$ irgendwelche linear unabhängige Vektoren im $\mathbb{R}^n$.

Anfangsbedingungen $y_1(x_0) = e_1\,, \ldots\,, y_n(x_0) = e_n$.

Satz 6.1 $\Rightarrow$ Eine beliebige Lösung z von (2) lässt sich mit

$$z(x_0) =: z_0 = \sum_{i=1}^{z^i} e_i$$

in der Form

$$z(x) = \sum_{i=1}^{n} z^i\ y_i(x)$$

schreiben, denn $z(x)$ ist Lösung von (2) wegen Satz 6.1.

Nach Voraussetzung (Lipschitz-Bedingung ist erfüllt, „zusammenhängend“) ist die Lösung sogar eindeutig durch $z(x_0) = z_0$ bestimmt.

Ist speziell $z(x_0) = 0$ für irgendein $x_0 \in G$, so ist $z(x) = 0$ für alle $x \in G$.

Satz 6.2: Die Elemente der $(n\,, m)$-Matrix $A(x)$ seien im Intervall $G: x_a < x < x_b$ stetige Funktionen von x ($x_a = -\infty\,, x_b = +\infty$ erlaubt) $\Rightarrow$

1.) Die Lösungen $y(x)$ der DGL $y' = A(x) \cdot y$ existiert für alle $x \in G$; sie ist stetig differenzierbar und eindeutig.

2.) Ist $e_1\,, \ldots\,, e_n$ eine beliebige Basis des $\mathbb{R}^n$, so lässt sich die Lösung z mit der Anfangsbedingung

$$z(x_0) = z_0 = \sum_i z^i\ e_i\ (x_0 \in G)$$

durch die Gleichung

$$z(x) = \sum_i z^i\ y_i$$

gewinnen, wenn y_i die Lösungen mit $y_i(x_0) = e_i$ sind.

Beweis: y' existieren, da y eine Lösung der DGL ist; y' ist stetig, da in (2) $A(x)$ in G stetig ist. Eindeutigkeit: Siehe Abschnitt 6.1.

„Wenn in der Mathematik etwas wichtig ist, gibt es viele Definitionen dazu, weil jeder seinen eigenen Ausdruck hat.“

Definition: Die Vektorfunktionen $y_i(x)$ in Satz 6.2 heißen **Lösungsbasis**. Sie lassen sich in einer $(m\,, n)$-Matrix

$$Y(x) := (y_1(x)\,, \ldots\,, y_n(x)) = \begin{pmatrix} y_1^1(x) & \cdots & y_n^1(x) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^n(x) & \cdots & y_n^n(x) \end{pmatrix}$$

zusammenfassen: **Fundamentalmatrix** oder **Übergangsmatrix** (Name, da sie den

„Übergang“ $z(x_0) \to z(x)$ liefert).
$Y'(x) = A(x) \cdot Y(x)$

Wählt man für die Basis $\{e_i\}$ in Satz 6.2 die natürliche Basis, d.h. $Y(x_0) = E$ (Einheitsmatrix), gilt außerdem:
$z(x) = Y(x) \cdot z(x_0)$. In diesem Fall heißt Y **bezüglich $x = x_0$ normierte Lösungsmatrix**.

Satz 6.3: Sind die Lösungsvektoren $z_1(x), \ldots, z_n(x)$ der DGL $z' = A(x) \cdot z$ (A sei stetig in G) in einem Punkt $x_0 \in G$ linear unabhängig, so sind sie es für alle $x \in G$.

Beweis: Annahme: Es existiert ein $x_1 \in G$ mit $z_1(x_1), \ldots, z_n(x_1)$ linear abhängig $\Rightarrow$ es existiert $a^1 \in \mathbb{R}, \ldots, a^n \in \mathbb{R}$ mit mindestens einem $a^i \neq 0$ und

$$0 = \sum_{i=1}^{n} a^i z_i(x_1).$$

Definiert man die Vektorfunktion y durch

$$y := \sum_i a^i z_i,$$

so ist y eine Lösung der DGL und $y(x_1) = 0$, $y(x_0) \neq 0$ nach Voraussetzung. WIDERSPRUCH, da $y(x) \equiv 0$ falls $y(x_1) = 0$ (Eindeutigkeit; siehe oben).

***Bemerkung**: Ist $Y(x)$ eine Fundamentalmatrix (d.h. $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ sind linear unabhängig), so ist $Y(x) \cdot Y^{-1}(x_0)$ die bezüglich x_0 normierte Lösungsmatrix. Statt (3) gilt:*

(4) $z(x) = Y(x)\, Y^{-1}(x_0)\, z(x_0)$

Satz 6.4: Sei $Y(x)$ eine Fundamentalmatrix der DGL (2). Eine (n, n)-Matrix $A(x)$ ist genau dann eine Fundamentalmatrix von (2), wenn
$A(x) = Y(x) \cdot K$
gilt, wobei K eine nicht-singuläre (d.h. Determinante ungleich 0) konstante (n, n)-Matrix ist.

Beweis:

1.) Seien $A(x)$ und $Y(x)$ Fundamentalmatrizen. Definiere K durch $A(x_0) = Y(x_0) \cdot K$ für ein $x_0 \in G$. Wegen (4) gilt für alle Lösungen z von (2):
$z(x) = Y(x) \cdot Y^{-1}(x_0)\, z(x) = A(x) \cdot A^{-1}(x_0)\, z(x_0)$.
Da die Lösungen $z(x_0)$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$ bilden, darf man schließen:
$Y(x) \cdot Y^{-1}(x_0) = A(x) \cdot A^{-1}(x_0) = A(x) \cdot K^{-1} \cdot Y^{-1}(x_0)$; multipliziert mit $Y(x_0) \Rightarrow$
$Y(x) = A(x) \cdot K^{-1}$

2.) Aus $Y' = A \cdot Y$ folgt für eine konstante Matrix K: $(Y \cdot K)' = A \cdot (Y \cdot K)$, d.h. mit $Y(x)$ ist auch $Y \cdot K$ eine Fundamentalmatrix, da $\det(K) \neq 0$.

***Bemerkung**: In der DGL $Y' = A(x) \cdot Y$ wird die Matrix $A(x)$ durch die Fundamentalmatrix eindeutig festgelegt: Sei $Y(x)$ eine in einem offenen Intervall G stetig differenzierbare*

(n, n)*-Matrix mit* $\det(Y(x)) \neq 0$*, so existiert genau eine* (n, n)*-Matrix* $A(x)$*, so dass* Y *Fundamentalmatrix von* $Y' = A \cdot Y$ *ist.*

Beweis: Setze $A(x) = Y' \cdot Y^{-1}$.

6.3 Lösung des inhomogenen Problems

„Variation der Konstanten“

Satz 6.5: Die Elemente der (n, n)-Matrix $A(x)$ seien im Intervall $G: x_a < x < x_e$ stetige Funktionen von x, ebenso sei $b(x) \in \mathbb{R}^n$ stetig in G. Dann gilt:

1.) Die Lösungen $y(x)$ der DGL $y' = A(x) \cdot y + b(x)$ existieren für alle $x \in G$, sie sind stetig differenzierbar und eindeutig.

2.) Ist $Y(x)$ eine Fundamentalmatrix der homogenen DGL $Y' = A \cdot Y$, dann lässt sich die Lösung der inhomogenen DGL mit den Anfangsbedingungen $z(x_0) = z_0$ durch

(5) $$z(x) = Y(x) \cdot Y^{-1}(x_0)\, z_0 + Y(x) \int_{x_0}^{x} Y^{-1}(t)\, b(t)\, \mathrm{d}t$$

angeben.