Ein Skript der Vorlesung

Mathematik für Physiker
Analysis

Kapitel 17: Approximation periodischer Funktionen: Fourierreihen

nach dem Buch „Analysis 1“ von Prof. Dr. Königsberger, Springer Verlag

Prof. Peter Vogl
TU München
2. Semester, SS 2000

von Michael Wack, Christoph Moder, Manuel Staebel

http://www.skriptweb.de

Hinweise (z.B. auf Fehler) bitte per eMail an uns: mail@skriptweb.de - Vielen Dank.

Inhaltsverzeichnis

17. Approximation periodischer Funktionen: Fourierreihen

17.1 Der Weierstraßsche Approximationssatz für periodische Funktionen

Definition: Ein **trigonometrisches Polynom** mit Grad $\leq n$ ist eine mit komplexen Koeffizienten c_k gebildetet Funktion.

$$T(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{i k x}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad c_k \in \mathbb{C}$$

Summen und Produkte trigonometrischer Polynome sind offenbar wieder trigonometrische Polynome. Mittels $e^{ikx} = \cos kx + i \sin kx$ kann T auch in der reellen Form:

$T(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ gebracht werden. (wobei i.A. $a_k, b_k \in \mathbb{C}$):

(1)

$$a_0 = 2c_0 \qquad c_0 = \frac{a_0}{2}$$

$$a_k = c_k + c_{-k} \qquad c_k = \frac{1}{2}(a_k - i b_k)$$

$$b_k = i(c_k - c_{-k}) \qquad c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + i b_k)$$

Beweis: Übung

Bemerkung: $c_k = c_{-k}^*$

$$a_k = c_k + c_k^* = 2 \operatorname{Re} c_k$$

$$b_k = i(c_k - c_k^*)\, i(2i \operatorname{Im} c_k)$$

Die Koeffizienten c_k und damit $a_{k,} b_k$ sind durch T eindeutig bestimmt, wegen der sogenannten **Orthogonalitätsrelation**.

(2) $$\int_0^{2\pi} e^{inx} \cdot e^{-imx} \, dx = \begin{cases} 2\pi & \text{falls } n = m \\ 0 & \text{falls } n \neq m \end{cases} \qquad n, m \in \mathbb{Z}$$

ist nämlich $\left(e^{i 2\pi k} = 1 \quad k \in \mathbb{Z}\right)$

(3) $c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T(x)\, e^{-ikx}\, \mathrm{d}x$

Notation: Kronecker-Symbol: $\int_0^{2\pi} e^{inx-imx}\, \mathrm{d}x = 2\pi\, \delta_{nm}$

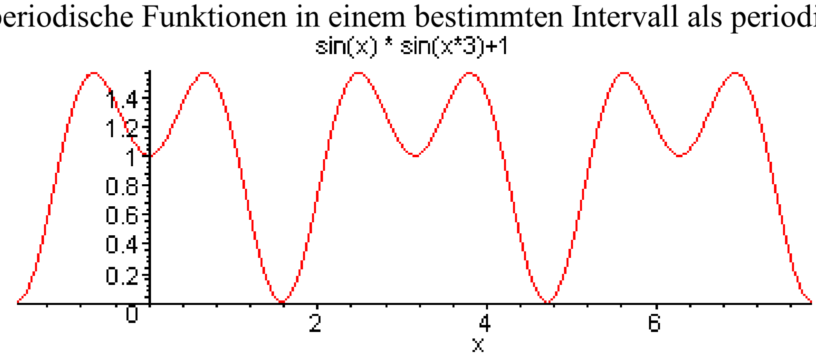
$$\delta_{nm} = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

Definition: Wir bezeichnen $\bar{T}$ die Menge der 2π -periodischen, stetigen Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit folgender Eigenschaft:

$\forall\ \epsilon > 0\ \exists$ reelles trigonometrisches Polynom T mit $|f(x) - T(x)| \le \varepsilon \quad \forall\ x \in \mathbb{R}$.

[Dies ist analog zu $\bar{P}$ in 16.6]

$T = \frac{2\pi}{\omega}$; $x := \omega \cdot T$; periodische Funktion: $f(x) = f(x + 2\pi)$; (bzw. man kann auch oft nichtperiodische Funktionen in einem bestimmten Intervall als periodisch betrachten)



$f(x) = \sin(x) \cdot \sin(3 \cdot x) + 1$;

$f(x)$ lässt sich durch Superposition unendlich vieler harmonischer Schwingungsprozesse darstellen.

$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{N} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$;

komplexe Schreibweise: $\cos kx = \frac{1}{2}\left(e^{ikx} + e^{-ikx}\right)$; $\sin kx = \frac{1}{2i}\left(e^{ikx} - e^{-ikx}\right)$;

$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} \left[a_k \frac{1}{2}\left(e^{ikx} + e^{-ikx}\right) + b_k \frac{1}{2i}\left(e^{ikx} - e^{-ikx}\right) \right] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=-N}^{N} c_k\, e^{ikx}$;

$c_{\pm k} = \frac{1}{2}\left(a_k \mp i\, b_k\right)$; $k > 0$;

$c_0 = \frac{a_0}{2}$;

Umkehrung: $a_k = c_k + c_{-k}$; $b_k = i\,(c_k - c_{-k})$;