

Ein Skript der Vorlesung

Mathematik für Physiker

Analysis

***Kapitel 17: Approximation periodischer Funktionen:
Fourierreihen***

nach dem Buch „Analysis 1“ von Prof. Dr. Königsberger, Springer Verlag

Prof. Peter Vogl
TUM München
2. Semester, SS 2000

von Michael Wack, Christoph Moder, Manuel Staebel
(©2000)
<http://www.skriptweb.de>

Hinweise (z. B. auf Fehler) bitte per E-Mail an uns: mail@skriptweb.de - Vielen Dank.

Inhaltsverzeichnis

17. Approximation periodischer Funktionen: Fourierreihen	2
17.1 Der Weierstraßsche Approximationssatz für periodische Funktionen	2
17.2 Definition der Fourierreihen. Der Identitätssatz	6
17.4 Punktweise Konvergenz nach Dirichlet	9
Der Dirichlet-Kern	10
17.5–17.6 Fourierreihen stückweise stetig differenzierbarer Funktionen	11

17. Approximation periodischer Funktionen: Fourierreihen

17.1 Der Weierstraßsche Approximationssatz für periodische Funktionen

Definition: Ein **trigonometrisches Polynom** mit Grad $\leq n$ ist eine mit komplexen Koeffizienten c_k gebildete Funktion.

$$T(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{i k x}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad c_k \in \mathbb{C}$$

Summen und Produkte trigonometrischer Polynome sind offenbar wieder trigonometrische Polynome. Mittels $e^{i k x} = \cos k x + i \sin k x$ kann T auch in der reellen Form:

$$T(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos k x + b_k \sin k x) \text{ gebracht werden. (wobei i. A. } a_k, b_k \in \mathbb{C} \text{)}$$

(1)

$$\begin{aligned} a_0 &= 2 c_0 & c_0 &= \frac{a_0}{2} \\ a_k &= c_k + c_{-k} & c_k &= \frac{1}{2} (a_k - i b_k) \\ b_k &= i (c_k - c_{-k}) & c_{-k} &= \frac{1}{2} (a_k + i b_k) \end{aligned}$$

Beweis: Übung

Bemerkung: $c_k = c_{-k}^*$

$$a_k = c_k + c_k^* = 2 \operatorname{Re} c_k$$

$$b_k = i (c_k - c_k^*) = 2 i \operatorname{Im} c_k$$

Die Koeffizienten c_k und damit a_k, b_k sind durch T eindeutig bestimmt, wegen der sogenannten **Orthogonalitätsrelation**.

$$(2) \quad \int_0^{2\pi} e^{i n x} \cdot e^{-i m x} dx = \begin{cases} 2\pi & \text{falls } n = m \\ 0 & \text{falls } n \neq m \end{cases} \quad n, m \in \mathbb{Z}$$

$$\text{ist nämlich } (e^{i 2\pi k} = 1 \quad k \in \mathbb{Z})$$

$$(3) \quad c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T(x) e^{-ikx} dx$$

Notation: Kronecker-Symbol: $\int_0^{2\pi} e^{inx - imx} dx = 2\pi \delta_{nm}$

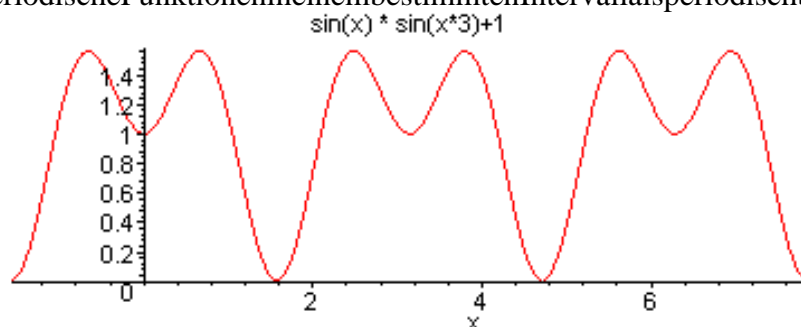
$$\delta_{nm} = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

Definition: Wir bezeichnen \bar{T} die Menge der 2π -periodischen, stetigen Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit folgender Eigenschaft:

$\forall \epsilon > 0 \exists$ reelles trigonometrisches Polynom T mit $|f(x) - T(x)| \leq \epsilon \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

[Dies ist analog zu \bar{P} in 16.6]

$T = \frac{2\pi}{\omega}$; $x := \omega \cdot T$; periodische Funktion: $f(x) = f(x + 2\pi)$; (bzw. man kann auch oft nichtperiodische Funktionen in einem bestimmten Intervall periodisch betrachten)



$$f(x) = \sin(x) \cdot \sin(3x) + 1;$$

$f(x)$ lässt sich durch Superposition unendlich vieler harmonischer Schwingungsprozesse darstellen.

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^N (a_k \cos kx + b_k \sin kx);$$

komplexe Schreibweise: $\cos kx = \frac{1}{2} (e^{ikx} + e^{-ikx})$; $\sin kx = \frac{1}{2i} (e^{ikx} - e^{-ikx})$;

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N \left[a_k \frac{1}{2} (e^{ikx} + e^{-ikx}) + b_k \frac{1}{2i} (e^{ikx} - e^{-ikx}) \right] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=-N}^N c_k e^{ikx};$$

$$c_{\pm k} = \frac{1}{2} (a_k \mp i b_k); \quad k > 0;$$

$$c_0 = \frac{a_0}{2};$$

Umkehrung: $a_k = c_k + c_{-k}$; $b_k = i(c_k - c_{-k})$;