

Ein Skript der Vorlesung

# Mathematik für Physiker Analysis

## ***Kapitel 17: Approximation periodischer Funktionen: Fourierreihen***

nach dem Buch „Analysis 1“ von Prof. Dr. Königsberger, Springer Verlag

Prof. Peter Vogl  
TUM München  
2. Semester, SS 2000

von Michael Wack, Christoph Moder, Manuel Staebel  
(©2000)

*<http://www.skriptweb.de>*

*Hinweise (z.B. auf Fehler) bitte per E-Mail an uns: [mail@skriptweb.de](mailto:mail@skriptweb.de) - Vielen Dank.*

## Inhaltsverzeichnis

17. Approximation periodischer Funktionen: Fourierreihen .....	2
17.1 Der Weierstraßsche Approximationssatz für periodische Funktionen .....	2
17.2 Definition der Fourierreihen. Der Identitätssatz .....	6
17.4 Punktweise Konvergenz nach Dirichlet .....	9
Der Dirichlet-Kern .....	10
17.5–17.6 Fourierreihen stückweise stetig differenzierbarer Funktionen .....	11

## 17. Approximation periodischer Funktionen: Fourierreihen

### 17.1 Der Weierstraßsche Approximationssatz für periodische Funktionen

**Definition:** Ein **trigonometrisches Polynom** mit Grad  $\leq n$  ist eine mit komplexen Koeffizienten  $c_k$  gebildete Funktion.

$$T(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{i k x}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad c_k \in \mathbb{C}$$

Summen und Produkte trigonometrischer Polynome sind offenbar wieder trigonometrische Polynome. Mittels  $e^{i k x} = \cos k x + i \sin k x$  kann  $T$  auch in der reellen Form:

$$T(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos k x + b_k \sin k x) \text{ gebracht werden. (wobei i.A. } a_k, b_k \in \mathbb{C} \text{ )}: \\$$

(1)

$$\begin{aligned} a_0 &= 2 c_0 & c_0 &= \frac{a_0}{2} \\ a_k &= c_k + c_{-k} & c_k &= \frac{1}{2} (a_k - i b_k) \\ b_k &= i (c_k - c_{-k}) & c_{-k} &= \frac{1}{2} (a_k + i b_k) \end{aligned}$$

### Beweis: Übung

Bemerkung:  $c_k = c_{-k}^*$

$$a_k = c_k + c_{-k}^* = 2 \operatorname{Re} c_k$$

$$b_k = i (c_k - c_{-k}^*) = 2 i \operatorname{Im} c_k$$

Die Koeffizienten  $c_k$  und damit  $a_k, b_k$  sind durch  $T$  eindeutig bestimmt, wegen der sogenannten **Orthogonalitätsrelation**.

$$(2) \quad \int_0^{2\pi} e^{i n x} e^{-i m x} dx = \begin{cases} 2\pi & \text{falls } n = m \\ 0 & \text{falls } n \neq m \end{cases} \quad n, m \in \mathbb{Z}$$

$$\text{ist nämlich } \int_0^{2\pi} (e^{i 2\pi k} - 1) dx \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$(3) \quad c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T(x) e^{-ikx} dx$$

**Notation: Kronecker-Symbol:**  $\int_0^{2\pi} e^{inx} e^{-imx} dx = 2\pi \delta_{nm}$

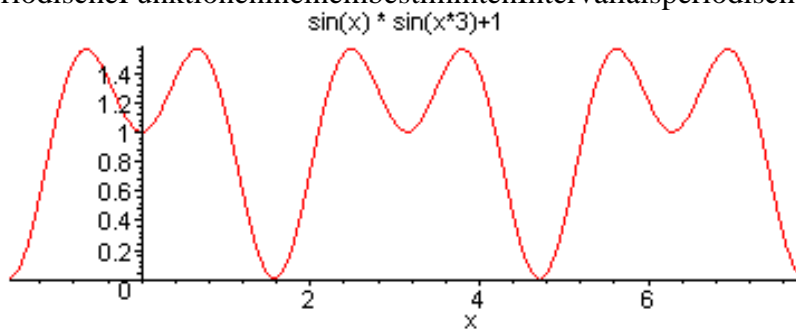
$$\delta_{nm} = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

**Definition:** Wir bezeichnen  $T$  die Menge der  $2\pi$ -periodischen, stetigen Funktionen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit folgender Eigenschaft:

$\forall \varepsilon > 0 \exists$  reelles trigonometrisches Polynom  $T$  mit  $|f(x) - T(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in \mathbb{R}$ .

[Dies ist analog zu  $P$  in 16.6]

$T = \frac{2\pi}{\omega}$ ;  $x := \omega t$ ; periodische Funktion:  $f(x) = f(x + 2\pi)$ ; (bzw. man kann auch oft nichtperiodische Funktionen in einem bestimmten Intervall periodisch betrachten)



$$f(x) = \sin(x) \sin(3x) + 1;$$

$f(x)$  lässt sich durch Superposition unendlich vieler harmonischer Schwingungsprozesse darstellen.

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^N (a_k \cos kx + b_k \sin kx);$$

komplexe Schreibweise:  $\cos kx = \frac{1}{2} (e^{ikx} + e^{-ikx})$ ;  $\sin kx = \frac{1}{2i} (e^{ikx} - e^{-ikx})$ ;

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N \left[ a_k \frac{1}{2} (e^{ikx} + e^{-ikx}) + b_k \frac{1}{2i} (e^{ikx} - e^{-ikx}) \right] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N c_k e^{ikx};$$

$$c_{\pm k} = \frac{1}{2} (a_k \mp i b_k); \quad k > 0;$$

$$c_0 = \frac{a_0}{2};$$

Umkehrung:  $a_k = c_k + c_{-k}$ ;  $b_k = i(c_k - c_{-k})$ ;