TU München
Zentrum Mathematik
Prof. Dr. K. Buchner
Dr. P. Giesl

Sommersemester 2001

Abgabe am 26. Juni 2001
zu Beginn der Übung

Mathematik für Physiker 4

— Übungsblatt 8 —

Alle Aufgaben zählen 4 Punkte.

8.1: Notieren Sie (ohne Beweis) alle verschiedenen Jordannormalformen für eine

(a) 5×5 Matrix mit einem fünffachem Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$?

(b) 4×4 Matrix mit zwei je zweifachen Eigenwerten $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$?

8.2: Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $\dot{x} = Ax$ mit $x \in \mathbb{R}^4$, wobei

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

8.3: Begründen Sie folgenden Satz über eine reelle Jordannormalform:

Zu jeder Matrix A mit reellen Einträgen gibt es eine invertierbare Matrix T mit reellen Einträgen, so daß

$$TAT^{-1} = \tilde{J} = \begin{pmatrix} J_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & J_r & & & \\ & & & K_{r+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & K_{r+c} \end{pmatrix}, \text{ wobei}$$

$$J_j := \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & & & \\ & \lambda_j & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_j & 1 \\ & & & & \lambda_j \end{pmatrix}$$

$$\text{und } K_{r+j} := \begin{pmatrix} \lambda_j & \mu_j & 1 & & & & & \\ -\mu_j & \lambda_j & 0 & 1 & & & & \\ & & \lambda_j & \mu_j & \ddots & & & \\ & & -\mu_j & \lambda_j & & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & 0 & 1 \\ & & & & & \lambda_j & \mu_j \\ & & & & & -\mu_j & \lambda_j \end{pmatrix}$$

Hinweis: Die reellen Eigenwerte von A sind λ_j, $j = 1, \ldots, r$ und die komplexen sind $\lambda_j \pm i\mu_j$, $j = r+1, \ldots, r+c$. Verwenden Sie an Stelle der Basis

$$v_1, \ldots, v_r, w_1, \ldots, w_c, \overline{w_1}, \ldots, \overline{w_c}$$

aus dem Beweis des Satzes über die Jordansche Normalform die Basis

$$v_1, \ldots, v_r, Re(w_1), Im(w_1), \ldots, Re(w_c), Im(w_c)$$

.

8.4: Wie lautet die in 8.3 beschriebene reelle Jordannormalform $\tilde{J}$ der Matrix (vgl. Vorlesung!)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} ?$$

Berechnen Sie die Matrizen T^{-1} sowie T und zeigen Sie, daß $TAT^{-1} = \tilde{J}$ gilt.