TU München
Zentrum Mathematik
Prof. Dr. K. Buchner
Dr. P. Giesl

Sommersemester 2001

Abgabe am 16. Mai 2001
zu Beginn der Übung

Mathematik für Physiker 4

— Übungsblatt 3 —

Alle Aufgaben zählen 4 Punkte.

3.1: Lösen Sie das folgende System von Differentialgleichungen mit den Anfangswerten $x(0) = x_0$ und $y(0) = y_0$.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & 2x + y + 1 \\ \dot{y} & = & 2y \end{array} \right.$$

Hinweis: Nutzen Sie $e^{A+B} = e^A e^B$, *falls* $AB = BA$, *mit* $A = 2I$ *und geeignetem* B.

3.2: Lösen Sie das folgende System von Differentialgleichungen mit den Anfangswerten $x(0) = x_0$ und $y(0) = y_0$.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & 2x + y + 1 \\ \dot{y} & = & -x + 2y \end{array} \right.$$

Hinweis: Nutzen Sie $e^{A+B} = e^A e^B$, *falls* $AB = BA$, *mit* $A = 2I$ *und geeignetem* B.

3.3: Zeigen Sie folgende Aussage ("Reduktion der Ordnung für Systeme"):

Man betrachte das lineare homogene System von Differentialgleichungen

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & a_{11}(t)\, x + a_{12}(t)\, y \\ \dot{y} & = & a_{21}(t)\, x + a_{22}(t)\, y \end{array} \right. \tag{1}$$

mit stetigen Funktionen $a_{ij}(t)$, $i, j = 1, 2$. $\phi(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t))^T\colon I \to \mathbb{R}^2$ sei eine spezielle Lösung des Systems, für die $\phi_1(t) \neq 0$ für alle $t \in I$ gilt.

Dann erhält man eine zweite, von ϕ linear unabhängige Lösung $\psi\colon I \to \mathbb{R}^2$ durch den Ansatz

$$\psi(t) = u(t) \begin{pmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ g(t) \end{pmatrix},$$

wobei $u, g\colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen sind, g nicht konstant 0 in I ist, und u und g folgenden Differentialgleichungen genügen:

$$\dot{g} = \left(a_{22}(t) - a_{12}(t) \frac{\phi_2(t)}{\phi_1(t)} \right) g \tag{2}$$

$$\dot{u} = \frac{a_{12}(t)}{\phi_1(t)} g \tag{3}$$

3.4: Finden Sie die allgemeine Lösung des folgendes Systems von Differentialgleichungen:

$$\begin{cases} \dot{x} &= -x + \frac{1}{t}y + \ln t + \frac{1}{t} \\ \dot{y} &= (1-t)x + y + (t-1)\ln t \end{cases}, \tag{4}$$

wobei $t > 0$.

Hinweis: Zeigen Sie, daß $\phi(t) = (1, t)^T$ eine Lösung des homogenen Systems ist. Bestimmen Sie eine weitere, von $\phi(t)$ linear unabhängige Lösung der homogenen Gleichung mit Hilfe von Aufgabe 3.3. Bestimmen Sie eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung durch Variation der Konstanten.