Fehlerrechnungs-HOWTO

© Manuel Staebel

Einzelmessung

X = x1 ± Δx
Beispiel: **l = (355,5 ± 0,2) mm**
(Ableseunsicherheit (Δx) wurde hier auf 0,2 mm geschätzt)
andere Schreibweisen: **l = 355,5(2) mm** oder **l/mm = 355,5(2)**

Wiederholte Messungen

Mittelwert (arithmetisches Mittel): $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

Erwartungswert: x_e

$\Delta x_i=(x_i-\bar{x})$; $\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=0$ (Summe der Abweichungen verschwindet)

$\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$ (Summe der Quadrate der Abweichungen wird minimal im Gegensatz zu jedem anderen Bezugswert $\tilde{x}$)

Standardabweichung $s=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum^{n}(x_i-\bar{x})^2}$

Das Quadrat der Standardabweichung heißt **Varianz (s^2)**

Im Intervall $\bar{x}-s$ und $\bar{x}+s$ findet man rund 68,26% aller Meßwerte.

Bei einer Vielzahl physikalischer Messungen entspricht die Häufigkeitskurve der Meßwerte nahezu einer sogenannten Normalverteilung (Gaußsche Glockenkurve).

$$h(x)=\frac{1}{s\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-\bar{x})^2}{2s^2}}$$

Vertrauensbereich $\bar{x}-a\leq\bar{x}\leq\bar{x}+u$ Erwartungswert liegt mit einer Wahrscheinlichkeit von $(1-\alpha)$ in diesem Bereich, **u** bezeichnet die Meßunsicherheit.

$u=\frac{t}{\sqrt{n}}\cdot s$; n sei die Anzahl der Messungen

Im Rahmen des Praktikums soll stets die Meßunsicherheit für ein Vertrauensniveau von **68,26%** bestimmt werden:

n	2	3	4	5	6	8	10	13	20	30	32	50	80	100	125	200
t	1,84	1,32	1,2	1,15	1,11	1,08	1,06	1,05	1,03	1,02	1,02	1,01	1,00	1,00	1,00	1,00
$t/\sqrt{n}$	1,30	0,76	0,60	0,51	0,45	0,38	0,34	0,29	0,23	0,19	0,18	0,14	0,11	0,10	0,09	0,07

Korrekte Stellenangabe

Bei der Angabe der Meßunsicherheit u oder der Standardabweichung s wird generell aufgerundet und zwar auf eine gültige Stelle (Ausnahme: Bei Zahlenwerten die mit eins oder zwei beginnen immer zwei Stellen). Das endgültige Meßergebnis rundet man dann auf signifikante Stellen, d.h. Es wird nur noch die Stelle angegeben, in der sich der Fehler bemerkbar macht.

Apparativ bedingte Fehler

apparative Unsicherheit: f_a
statistische Unsicherheit: u_s

$u=\sqrt{u_s^2+f_a^2}$

Fortpflanzung von Unsicherheiten

g = F(x, y, z) $\Rightarrow \bar{g} = F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$

„Fehlerfortpflanzungsgesetz" von Gauß:

$$s_g = \sqrt{s_x^2 \cdot \left(\frac{Delta\, g}{Delta\, x}\right)^2_{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}} + s_y^2 \cdot \left(\frac{Delta\, g}{Delta\ y}\right)^2_{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}} + s_z^2 \cdot \left(\frac{Delta\, g}{Delta\ z}\right)^2_{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}}}$$

Wenn der Betrag des in der Meßunsicherheit enthaltenen apparativen Fehlers f_S nicht merklich größer ist als der Anteil der zufälligen Fehler u_Z, und wenn die einzelnen Meßunsicherheiten von demselben Vertrauensniveau sind, dann kann das Gaußsche „Fehlerfortpflanzungsgesetz" auch zur Ermittlung der Meßunsicherheiten u_g von g herangezogen werden:

$$u_g = \sqrt{u_x^2 \cdot \left(\frac{Delta\, g}{Delta\, x}\right)^2_{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}} + u_y^2 \cdot \left(\frac{Delta\, g}{Delta\ y}\right)^2_{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}} + u_z^2 \cdot \left(\frac{Delta\, g}{Delta\ z}\right)^2_{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}}}$$

Ergebnisgröße g wird angegeben: $g = \bar{g} \pm u$

g = ± x ± y ± z $\Rightarrow u_g = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$

g = x^a y^b z^c $\Rightarrow \frac{u_g}{\bar{g}} = \sqrt{a^2 \cdot \left(\frac{u_x}{\bar{x}}\right)^2 + b^2 \left(\frac{u_y}{\bar{y}}\right)^2 + c^2 \cdot \left(\frac{u_z}{\bar{z}}\right)^2}$

Ausgleichsgerade